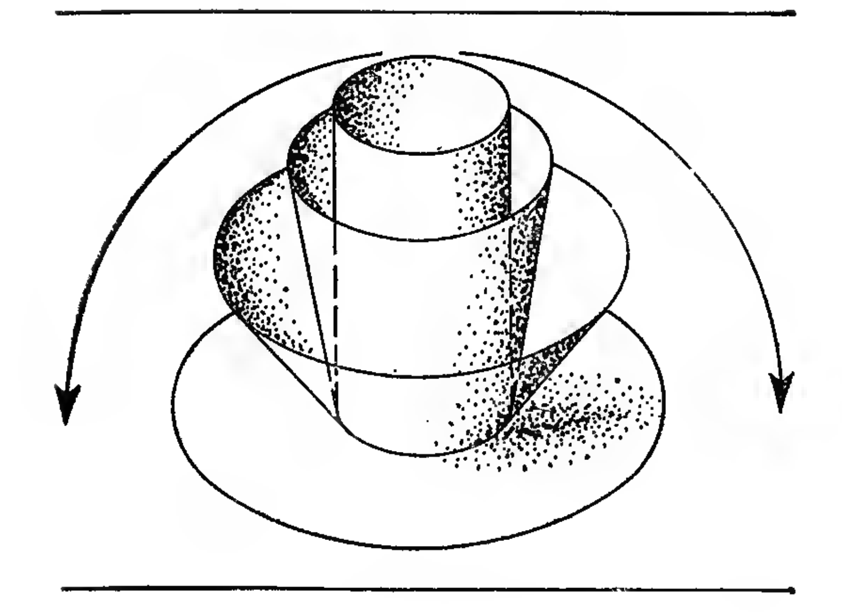
Ст. Барр

РОССЫПИ ГОЛОВОЛОМОК

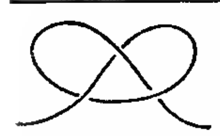


STEPHEN BARR

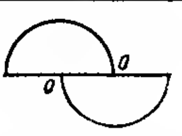
A MISCELLANY OF PUZZLES
THOMAS Y. CROWELL COMPANY
New York, 1965

2ND MISCELLANY OF PUZZLES
THE MACMILLAN COMPANY
Collier — Macmillan Limited
London, 1969

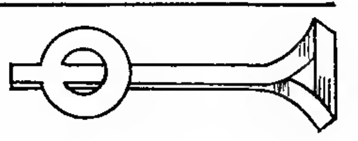
EXPERIMENTS IN TOPOLOGY
THOMAS Y. CROWELL COMPANY
New York, 1964

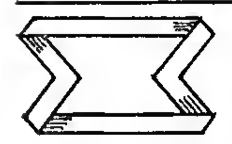


Стивен Барр



РОССЫПИ





ГОЛОВОЛОМОК

Издание третье,
стереотипное

Перевод с английского
Ю. Н. Сударева
под редакцией
И. М. Яглома

Москва «Мир» 1987

ББК 22.1
Б 24
УДК 51

Барр С.

Б 24 Россыпи головоломок: Пер. с англ./3-е изд., стереотип. — М.: Мир, 1987. — 415 с., ил.

Сборник, составленный из трех небольших книжек по занимательной математике известного американского писателя и популяризатора Стивена Барра: «Россыпи головоломок», «Новые россыпи головоломок» и «Топологические эксперименты».

Книга рассчитана на самые широкие круги читателей, особенно любителей занимательной математики.

Б $\frac{1702010000-319}{041(01)-87}$ Без объявл. ББК 22.1

Редакция научно-популярной и научно-фантастической литературы

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Первый дошедший до нас учебник математики, точнее, его кусок длиною более пяти метров, известный в литературе как «лондонский папирус», или «папирус Райнда» (по имени обнаружившего его англичанина, который подарил свиток Британскому музею), а также как «папирус Ахмеса» (по имени его писца, жившего на рубеже XVII в. до н. э.), содержит 84 сопровождаемые решениями задачи. По этому учебнику велись занятия в школе государственных писцов. Уже древние египтяне понимали, сколь важную роль в процессе обучения играет элемент занимательности, и среди включенных в «папирус Ахмеса» задач было немало таких, которые подошли бы и для настоящего сборника. Так, в течение тысячелетий (!) из одного сборника математических головоломок в другой кочует «задача о кошках» из этого папируса (в каждом из 7 домов живет по 7 кошек; каждая кошка съела по 7 мышей; каждая мышь съела по 7 колосьев; из каждого колоса могло получиться 7 мер хлеба — так сколько всего предметов мы перечислили?); иными словами, первый известный нам учебник математики был «россыпью головоломок».

Вообще-то только древние греки (и в первую очередь злосчастный Евклид) на горе детей многих поколений ввели привычную систему обучения математике — с длинным рядом определений и теорем, образующих непрерывную цепочку, которую надо постигать и запоминать звено за звеном.

Прежде все было не так: мы располагаем сотнями клинописных «математических табличек» учебного характера, составленных древними вавилонянами,— это тоже в своем роде «россыпи головоломок», Прежде было

не так — но и потом тоже не всегда было так: высочайший уровень строгости, отточенная логическая дедукция древних греков в чем-то явились даже препятствием на пути дальнейшего прогресса математической науки. Греки глубоко развили знания, полученные ими от египтян и вавилонян, которым свойственная грекам скрупулезность в выводах была чуждой. Однако для решительного прыжка вперед надо отойти назад: на уровне строгости греков математический анализ был обоснован лишь в XIX в., построения же Лейбница и Ньютона греков никак бы не удовлетворили — но ведь создать анализ сразу на уровне строгости Карла Вейерштрасса (1815—1897) было явно невозможно! И вот, на закате греческой цивилизации мы видим гениального Диофанта Александрийского[1], который, возвратясь к вавилонской и египетской традиции, начал набирать новые факты. Его не волновало приведение их в строгую систему; и «Арифметика» Диофанта — это снова «россыпь головоломок» (притом весьма трудных).

«Россыпями головоломок» были все пособия по математике в древней Индии и древнем Китае; такой же характер носило большинство трудов, созданных в русле арабской культуры.

Самым знаменитым произведением средневековой математики была книга «Liber abaci» (1228) итальянского купца Леонардо из Пизы, известного как Леонардо Фибоначчи. По этой замечательной «россыпи головоломок» в Европе учили математику в течение столетий (наибольшую популярность из головоломок Леонардо приобрела «задача о размножающихся кроликах», послужившая основой важной теории рекуррентных, или возвратных, последовательностей[2]). Да и что иное, кроме «россыпи головоломок», мог предложить своим читателям Леонардо: происхождение его книги тесно связано с «математическими турнирами», которыми увлекался обласкавший Фибоначчи чудаковатый (как

---

[1] Кстати, все дошедшие до нас биографические сведения о Диофанте заимствованы из стихотворной задачи «Сколько жил Диофант?», включенной в одну из позднегреческих «россыпей головоломок».

[2] См., например, Воробьев Н. Н. Числа Фибоначчи. — М.: Наука, 1969, или Маркушевич А. И. Возвратные последовательности. — М.: Наука, 1975.

считали тогда) или, напротив, мудрый и во многом обогнавший свое время (как думаем мы сегодня) император «священной римской империи германской нации» и король легкомысленного (точнее — ренессансного) Неаполитанского королевства Фридрих II Гогенштауффен. (Традиция «математических турниров» получила дальнейшее развитие в Италии периода «высокого Возрождения» и имела большое значение для достигнутого в этот период прогресса математики.) В XVI—XVII вв. сборники математических головоломок уже не рассматривались как учебники, но отношение к ним было достаточно серьезным, и ни один труд по истории математики не обойдет вниманием сборник «Приятных и занимательных задач» сира Баше де Мезирака (Лион, 1612 г.), сыгравший большую роль в создании и развитии теории чисел.

Однако мы живем после Евклида и Архимеда и не имеем права и возможности игнорировать древнегреческий опыт. В школе мы ныне учимся по составленным под руководством акад. А. Н. Колмогорова пособиям, которые по систематичности и уровню строгости не уступают «Началам» Евклида. Но это в школе, вне школы все мы — и бывшие ученики, и ученики нынешние — имеем полное право пренебречь Евклидом и обратиться к писцу Ахмесу и сиру Баше, другими словами, обратиться к «приятным и занимательным» головоломкам, думать над которыми можно и в часы досуга и которые, право же, учат не так уж малому.

Предлагаемый читателю сборник головоломок составлен американским писателем и любителем математики Стивеном Барром. В США он вышел в свет в виде трех отдельных книг, имевших значительный читательский успех,— возможно, даже больший, чем успех чисто беллетристических произведений Барра. К математике Барр обратился довольно поздно, заинтересовавшись задачами моделирования сложных поверхностей, обсуждаемыми в последней части настоящей книги. Его интерес стимулировали внимание и поддержка такого корифея занимательной математики, как хорошо известный нашим читателям Мартин Гарднер.

Успех книг Барра в определенной мере связан с их современностью, с тем, что они несут на себе достаточно явственную печать нашего времени. «Приятные и зани-

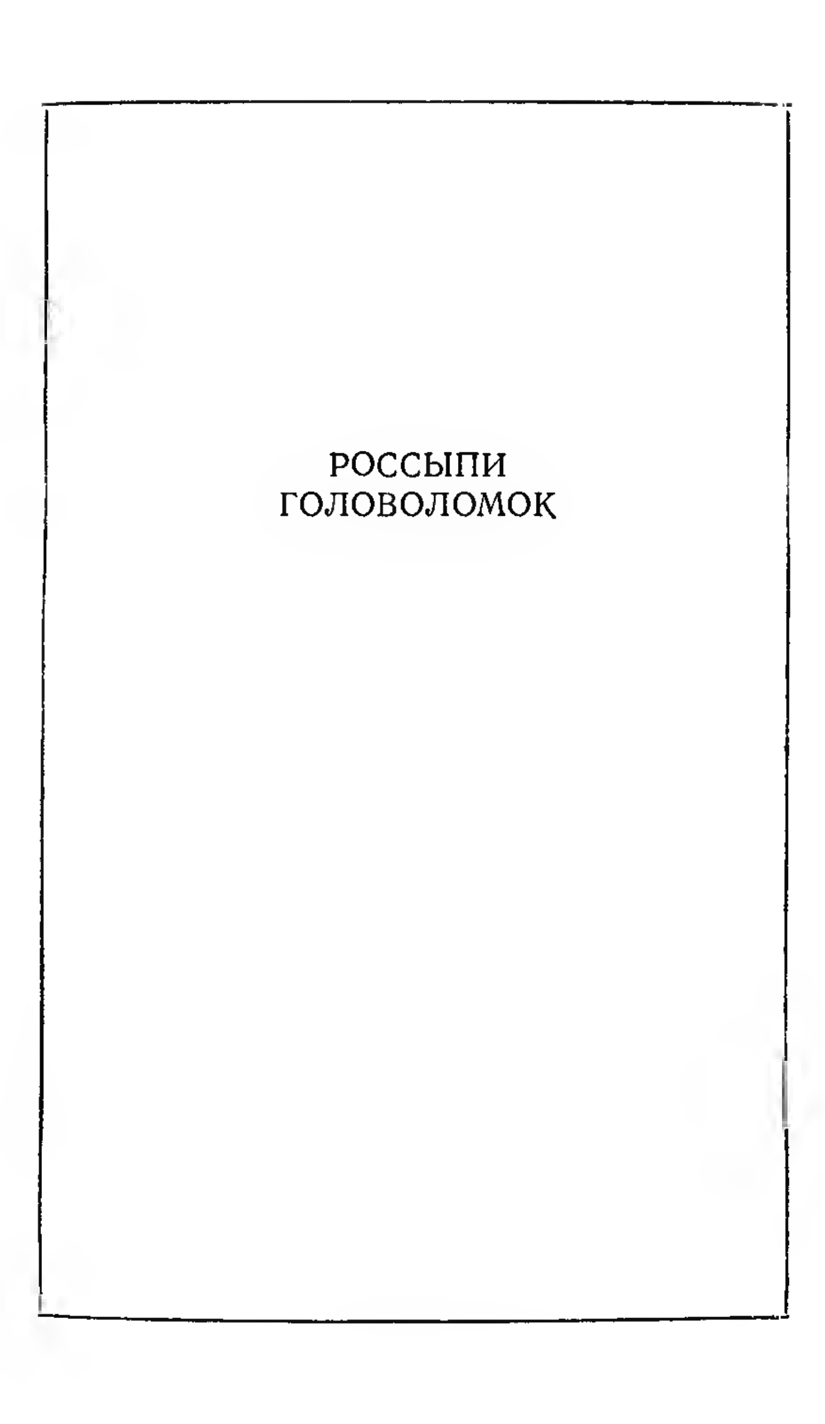
мательные задачи» Баше были, в первую очередь, связаны с целыми числами, ибо развитие теории чисел являлось в тот период насущной задачей математической науки. Головоломки Баше еще, разумеется, теорией чисел не являлись, но настраивали читателя на определенный лад, чем заметно способствовали прогрессу теории чисел как области математической науки.

Сегодня в математике на одно из первых мест выходит топология, заметно потеснившая свою «старшую сестру» — геометрию. Несколько даже неожиданный расцвет топологии является одной из характернейших примет современной науки. Надо сразу же сказать, что на самом деле «топологические эксперименты» Барра, как правило, даже к топологии-то не относятся — постановки задач здесь зачастую «выходят» из топологии и «приходят» к геометрии. Однако задачи эти, безусловно, могут способствовать пробуждению как интереса к топологии, так и некоторой топологической интуиции — и в этом заключается их смысл и интерес.

Еще одним достоинством книги Барра является ее полнейшая несистематичность: все задачи в ней независимы. Взяв с собой эту книгу, скажем, в дорогу, вы можете выбрать себе из нее в пути «изюминку» по вкусу. Но вы никогда не ощутите истинного вкуса изюминки, если ее разжуют за вас другие,— и над головоломками Барра надо думать самостоятельно, обращаясь к включенным в книгу решениям лишь после того, как найдете собственное, или если уж очень долго будете биться над задачей (но и в последнем случае ваши размышления не пройдут без пользы).

Итак, желаю вам успеха.

И. Яглом



РОССЫПИ ГОЛОВОЛОМОК

Прибавь еще один оттенок к радуге...

ШЕКСПИР

Мы извлекаем веру и заблуждение из факта...

САМЮЕЛЬ ГОФФЕНСТЕЙН

Плодитесь и размножайтесь...

БИБЛИЯ, кн. БЫТИЕ

Круглые числа всегда лживы...

САМЮЕЛЬ ДЖОНСОН

Порочный круг...

ЖОРЖ ДЮ МОРЬЕ

Прямо вниз по кривой линии и вокруг квадрата...

ТОМАС ХУД

Каждый кубический дюйм пространства — это чудо...

УОЛТ УИТМЕН

Бог восхищается нечетным числом...

ВИРГИЛИЙ

Евклид один видел обнаженную красоту...

ЭДНА СЕНТ ВИНСЕНТ МИЛЛЕЙ

Измеряйте высоту вашего ума по тени, которую он отбрасывает...

БРОУНИНГ

Головоломка в противоположность задаче представляет собой иечто такое, от решения чего вы получаете удовольствие — в противном случае с какой стати вы стали бы ее решать? Я ие думаю, что ответ иепременно должен удивить вас, одиако, мне кажется, вовсе не плохо, когда, узиав его, вы воскликнете: «Проклятье, как же мне самому это не прншло в голову!»

Головоломки из жнзни, вроде тех, где требуется найтн преступннка, зависят от обнаружения какого-то ключевого факта (именно его некогда и нскал Шерлок Холмс), но ответ на обычную головоломку не должеи опираться на какие-либо сведения, которые не были бы широко известны или до которых нельзя было бы додуматься в процессе решения.

Головоломка может быть даже коварной, с небольшим подвохом, но н в этом случае ответ должен быть в своем роде достовериым. Я однажды спросил у своей младшей внучки, которая, как я думал, уже начала изучать геометрию — я очень плохо разбираюсь в возрасте,— знает ли она, как построить квадрат.

— Да,— ответила девочка уверенно,— нужно просто отрезать у круга углы.

Из поздравительной речи доктора Силвэна Мура, произнесенной в Регент-клубе
Лондон, 1954 год

ГОЛОВОЛОМКИ

Два стакана портвейна. У А. и В. было 16 унций портвейна и два стакана по 8 унций каждый. Джентльмены наполнили свои стаканы, но, надо же такому случиться, их собачка, которая тоже обожала портвейн, вылакала из стакана, принадлежавшего В., целых 5 унций. Тем временем В. выпил по ошибке 3 унции портвейна из стакана, принадлежавшего А. Стоит заметить, что на стаканах были выгравированы деления, а также инициалы владельцев, каждый предпочитал пить из собственного стакана, да и вообще эти джентльмены были довольно легкомысленны и чудаковаты.

— Послушай,— сказал А.,— несправедливо, чтобы ты один страдал из-за собаки. Я отолью тебе из своего стакана, чтобы портвейна у нас оказалось поровну.

Но В. покачал головой.

— Я согласен, что мы должны распределить между собой потерянные 5 унций, но не забудь, что я уже выпил 3 унции из твоего стакана. Вот видишь, я их тебе возвращаю.

С этими словами В. вылил все, что у него оставалось, в стакан А., который при этом вновь наполнился до краев.

— Теперь мы поделим то, что осталось,— сказал В., и А. вылил ему в стакан половину своего портвейна.

— Вот видишь,— удовлетворенно заключил А.,— мы пришли к тому же, что предлагал и я,— у каждого из нас полстакана портвейна, и мы в расчете.

В расчете ли джентльмены на самом деле? Если нет, то как восстановить справедливость? (Попытайтесь ответить на вопрос, не пользуясь карандашом и бумагой.)

2. Паутина на кукольном домике. На рис. 1 изображен современный кукольный домик, покоящийся на

плоском основании. По центру симметричного фронтона высится флагшток AD. На крыше нижней части домика расположен садик размером 1×2. Высота флагштока равна 2 единицам. Все грани имеют прямоугольную форму.

Ночью один сведущий в математике, но в остальном безвредный паук протянул паутинки, связывающие A, B, C и D, как показано на рис. 1, тонкими линиями. При этом он столкнулся со странным фактом: оказа-

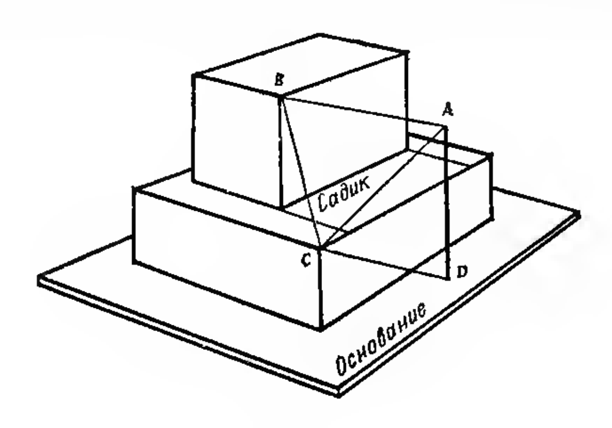


Рис. 1.

лось, что длина каждой из этих четырех паутинок равна высоте флагштока. Пауку захотелось протянуть пятую паутинку от B к D.

Какой длины окажется эта паутинка, если выразить ее в характерных размерах домика или любой из его частей?

3. **Патриарший крест.** С помощью одного прямого разреза, проходящего через точку A, разделите патриарший крест, изображенный на рис. 2, на две равновеликие части. Доказательство должно опираться на элементарную геометрию и затрагивать только рациональные отношения отрезков (то есть отношения, выражаемые рациональными дробями). Разрешается пользоваться лишь циркулем и линейкой. Длина стороны каждого из квадратиков на рисунке равна 1.

4. Спрячьте край. У вас имеется квадрат со стороной в 5 дюймов, вырезанный из толстой бумаги. По краям квадрата с обеих сторон бумаги идет красная полоска шириной в $^1/_8$ дюйма. Срез бумаги тоже покра-

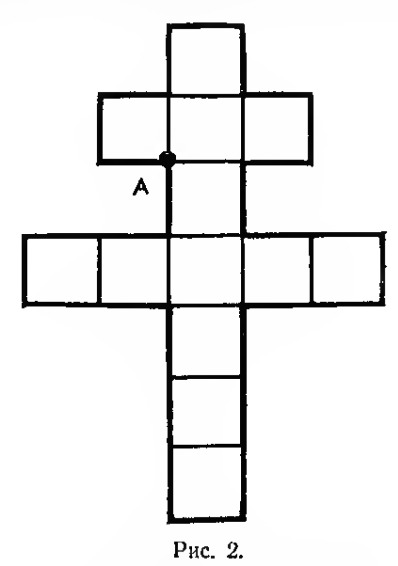
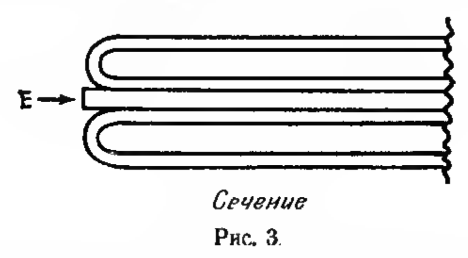


Рис. 2.

шен в красный цвет. Требуется сложить бумагу таким образом, чтобы красный цвет полностью исчез. Это зна-



Сечение

Рис. 3.

чит, что любой участок стороны квадрата или среза бумаги (даже угол) считается неспрятанным, если его можно различить среди прикрывающих частей бумаги, как показано в увеличенном виде на рис. 3.
Здесь E нужно убрать по крайней мере на $^1/_8$ дюйма. Если бумага уже была сложена и в результате очеред-

ного складывания образуется более чем одна складка, то мы все равно засчитываем одно новое складывание.

Каково минимальное число складываний, необходимое для решения задачи?

5. Постройте куб. У вас есть прямоугольный кусок бумаги размером 1×3. Разрежьте его (проводя прямые разрезы) на две одинаковые части так, чтобы, сложив их должным образом, а затем соединив вместе, получить куб. При этом не допускаются никакие наложения или дыры. Сведите число разрезов до минимума.

6. Человек в люльке. Человек стоит в строительной люльке, привязанной к концу *A* перекинутой через блок веревки (рис. 4). Другую часть веревки, *B*, он держит в руках. Прямо перед ним находится стена. Конец веревки *C*, расположенный ниже его рук, имеет в длину 5 футов и заканчивается петлей. Человек устал держать веревку в руках и хочет позавтракать. Он спускается до тех пор, пока ему в руки не попадает петля, которую он накидывает на торчащий в стене гвоздь. Длина всей веревки 25 футов. Веревка слегка эластична, так что в начальный момент (изображенный на рисунке) части *A* и *B* веревки сильно растянуты (примерно 90 % от критического растяжения, при котором веревка разрывается), а человек находится в 15 футах от земли. Растяжение веревки составляет 1 дюйм[1] на каждый фут. На какой высоте окажется человек, когда наденет петлю на гвоздь? Размером петли можно пренебречь. Дайте округленный ответ с точностью до полудюйма.

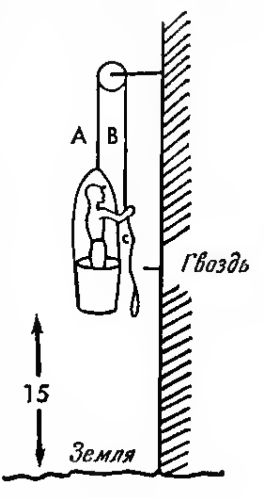


Рис. 4.

7. Сколько частей? Возьмите квадратный лист бумаги и разрежьте его поперек почти до конца (рис. 5, *а*).

---

[1] 1 фут = 12 дюймам.

Затем сложите, как указаио, и сиова разрежьте его поперек почти до конца (рнс. 5, *б*). Далее сложите его под прямым углом к предыдущей складке н вновь разрежьте, как и раньше (рис. 5, *в*). Продолжайте этот процесс, ио шестой разрез сделайте до конца. Сколько отдельиых частей у вас при этом получится?

Как выражается общее количество частей в случае любого числа разрезов (ие включая сюда последнні,

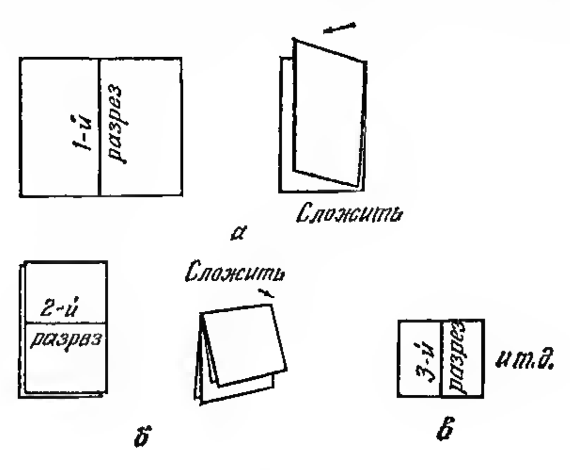


Рис. 5.

полный, разрез)? Попытайтесь ответнть на первый вопрос в уме. Затем попробуйте построить нечто вроде диаграммы, показывающей, что здесь происходит. (Эксперименты более чем с восемью складываниями исключаются, поскольку вы не сумеете нх осуществить на практике.)

8. **Медлеиио — зиачит раио.** Одни человек получил надежиую информацию о времени, когда объект *А* прибывает в пункт *X*. Основываясь на этнх данных, он оцеиил время его прибытия в пуикт *Y*. Человек попытался угадать скорость (постояииую) этого объекта А, но ошнбся. Тем не менее его информация во всем, что касается расположеиня *X* и *Y*, а также времеии прибытия *А* в *X*, правильна. В действительности объект *А* прнбывает в *Y* *раньше*, так как он движется *медленнее*, чем

предполагал человек. Объясните, как это могло произойти, и приведите пример из жизни.

9. Волк в овчарне. Волк пересекал пустыню. К середине своего пути он так отощал, что уже не мог двигаться дальше. И тут-то он наткнулся на железную ограду, за которой паслись жирные овцы — увы, слишком жирные, чтобы пролезть между прутьями. Самому́ оголодавшему волку это бы удалось, но он понимает, что если пролезет в загон и отъестся, то неминуемо растолстеет и уже не сможет выбраться из-за ограды, которая замкнута, слишком высока и прочна. Пастух придет с ружьем на следующей неделе, а волку не выдержать уже такого голодания, как раньше. Какова наилучшая стратегия волка в данной ситуации?

10. Что за животные? Два животных, A и B, находятся на огромной гладкой равнине. Если A хочет схватить B, B стремится убежать от A и B расположен от A в 20 ярдах, то A *всегда* может схватить B. В то же время если B хочет схватить A, A стремится убежать от B и A расположен от B в 20 ярдах, то B *всегда* может схватить A. Как это может быть и что это за животные?

11. Стихи о возрасте. Эти два четверостишия задают общие уравнения, лежащие в основе старинной загадки «Сколько лет Энни?» (Женщины, дети и адвокаты, по-видимому, смогут решить первую из них в уме. Что же касается математиков, то им совершенно необходимо разрешить пользоваться карандашом и бумагой.)

I

Прошу, найдите отношенье наших лет
(Но карандаш положен вам едва ли).
В два раза старше я, чем были вы в момент,
Когда я был такой, каким теперь вы стали.

II

На доказательство пусть хватит ваших сил
Того, что я, как ни были б вы старше, чем я был,
Когда вам было, сколько мне сейчас,
Моложе менее чем вдвое вас.

12. Семь зверей. Имеется семь (и только семь) зверей: лев, гиена, пудель со щенком, сиамская кошка

с котенком и датский дог. Каждый из них принадлежит к одному из двух подотрядов. Одного из животных зовут X, а другого (отличного от первого) — Y.

> Зрачки у льва отличаются по форме от зрачков X.
> Гиена принадлежит к тому же подотряду, что и Y.
> Y никогда не касается X.
> Какого зверя зовут Y?

Нужно заметить, что в нашем случае задача имеет единственное решение.

13. Веревка и солонка. Вы берете веревочную петлю, кладете ее на пол и придаете ей форму квадрата, в середину которого ставите солонку. Затем вы перекидываете угол квадратной петли через солонку, как показано пунктиром на рис. 6, *а*. Если вы проделаете это со

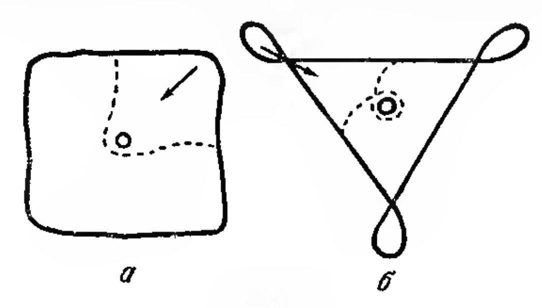


Рис. 6.

всеми четырьмя углами, то сколько замкнутых петель веревки будет окружать солонку?

Если вы сложите исходную петлю в виде треугольника, перекрутите каждую из его вершин по часовой стрелке и перекинете полученные при этом петли через солонку, как показано пунктиром на рис. 6, *б*, то сколько замкнутых петель в итоге будет окружать солонку? На оба вопроса вы должны ответить, не пользуясь ни веревкой, ни даже бумагой и карандашом.

14. «Лучинки». Для того чтобы сдлать «лучинку» (перекрученную полоску бумаги, годную, например, на то, чтобы с ее помощью прикурить, скажем, от костра), мы отрываем полоску от газеты, при этом один край

полоски остается ровным, а другой будет рваным. Затем мы начинаем скручивать нашу полоску с одного из двух углов (рис. 7). Допустим, мы хотим спрятать рва-

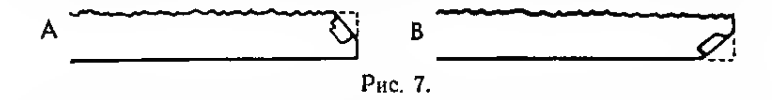


Рис. 7.

ный край. Тогда каким способом надо скручивать полоску? Да и вообще попробуйте, не пользуясь бумагой,

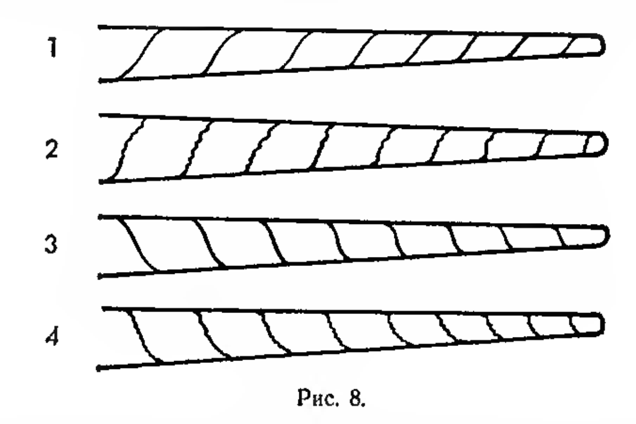


Рис. 8.

ответить на вопрос: к какому из указанных на рис. 8 результатов приведет каждый упомянутый выше способ?

15. Свободный участок. От параллельных стен, ограждающих с двух сторон изображенный на рис. 9 свободный участок земли шириною 10 ярдов, отходят еще две перегородки. В дальнем углу участка находится лампа *L*. Возвращаясь вечером из школы, Пит обычно видел эту лампу. Все расстояния до изгороди он измерил шагами (на рисунке они даны в ярдах). Позднее владелец участка построил два прямоугольных (на участке все имело прямоугольную форму) сарая, один перед перегородкой *B*, а другой за перегородкой *A*, использовав *A* и *B* как торцовые стены. Он сказал Питу, что отношение длины к ширине у обоих сараев одинаково, но не сообщил их величину. Владелец построил

также новую изгородь, идущую вдоль участка. Теперь Пит видел только, как свет лампы мелькает между *дальним* углом сарая *A* и *ближним* углом сарая *B*. Не в состоянии уже измерить что-либо шагами, он тем не ме-

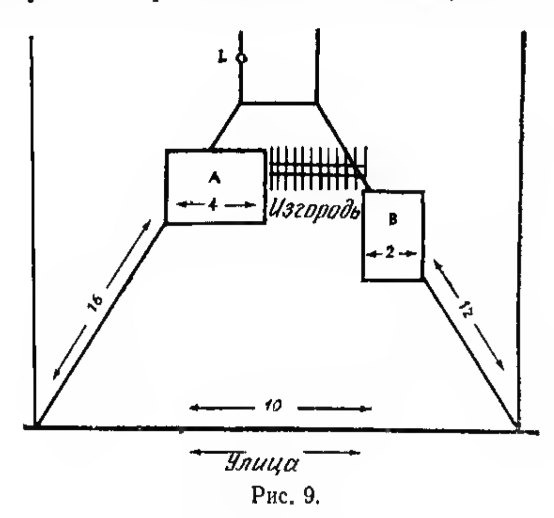


Рис. 9.

нее сумел вычислить длину участка. Чему же она равна?

16. Бумажные звезды. Каждому известно, что складывая особым образом и разрезая бумагу, можно получить звезды. Звезду мы определим как правильную фигуру с острыми лучами. Пятиугольник не подходит под наше определение, так как углы при его вершинах тупые; а вот фигура, изображенная на рис. 10, *а*,— это пятиконечная звезда. На самом деле она представляет собой десятиугольник, вершины которого, чередуясь через одну, определяют лучи нашей звезды. В данной головоломке разрешается сделать один прямой разрез, а вот число складываний не ограничено.

Сложив бумагу один раз, мы еще ничего не сможем сделать (рис. 10, *б*), а с помощью двух складываний удается получить квадрат (рис. 10, *в*), который никак нельзя считать звездой, поскольку углы при его вершинах не острые. Однако и здесь можно сделать «двухконечную звезду», если провести разрез под углом,

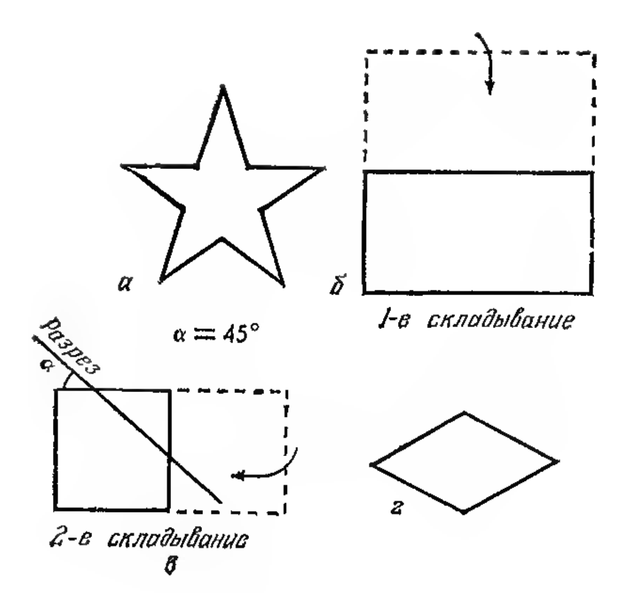

а
$\alpha = 45°$
б
1-е складывание
Разрез
α
2-е складывание
в
г

Рис. 10.

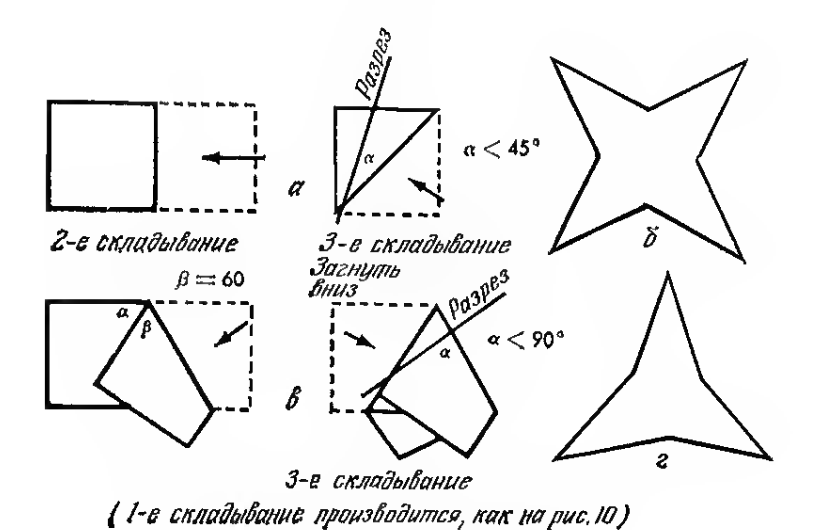

Разрез
α
$\alpha < 45°$
а
2-е складывание
3-е складывание
б
$\beta = 60$
Загнуть вниз
α
β
Разрез
α
$\alpha < 90°$
в
г
3-е складывание
(1-е складывание производится, как на рис. 10)

Рис. 11.

отличным от 45° (рис. 10, *г*). С помощью трех складываний (рис. 11, *а*) мы получаем настоящую четырехконечную звезду (рис. 11, *б*), а делая перегибы в разные стороны (рис. 11, *в*), удается получить трехконечную звезду (рис. 11, *г*).

I. Получите с помощью четырех складываний пятиконечную и шестиконечную звезды. (Восьмиконечную звезду можно получить, сделав одно дополнительное складывание по диагонали, показанное на рис. 11, *а*.)

II. Изготовьте трехконечную звезду с помощью четного числа складываний.

17. Трюк с шапкой Мёбиуса. Лист Мёбиуса получают, склеивая концы перекрученной на пол-оборота полоски бумаги (рис. 12)[1]. В результате у полоски

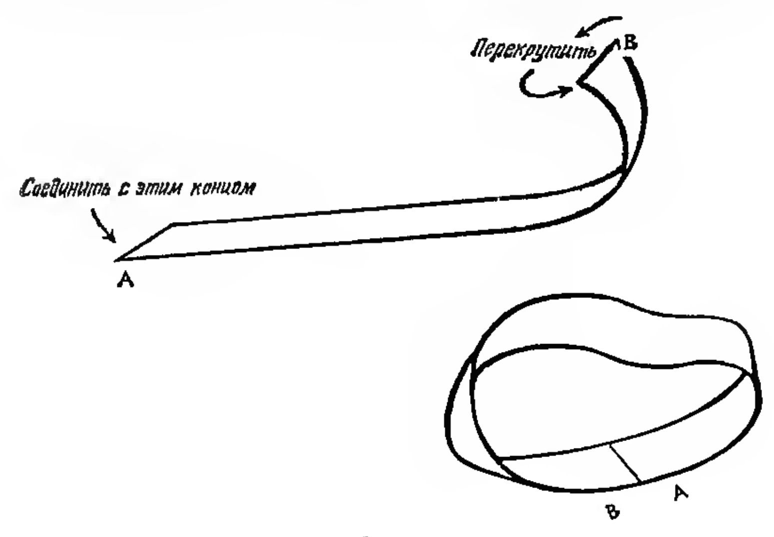


Рис. 12.

соединяются оба края *А* и *В* и обе стороны, так что у листа Мёбиуса — только одна сторона и только один край. Если вы проведете продольную линию по центру листа Мёбиуса, то она пройдет по обеим «сторонам»;

[1] Листу Мёбиуса уделено много внимания в заключительной части книги. — *Прим. ред.*

если же вы произведете вдоль этой линии разрез, то в результате получатся не две, а снова одна часть. Чтобы заниматься подобными головоломками, требуются карандаш, бумага и ножницы.

Если мы воспользуемся достаточно плотной бумагой, например полоской ватмана 1×10 см, то петля будет выглядеть как неправильный овал с прогибами. Растянув стороны, мы добьемся только того, что петля примет треугольную форму. Но исходная полоска не обязана быть прямоугольной: нужно только, чтобы края полоски, даже если они искривлены, были «параллельны», подобно краям дороги (не обязательно прямолинейной).

I. Определите с помощью эксперимента и рассуждений наилучшую форму полоски, при которой дыра в листе Мёбиуса, образованном из этой полоски, была бы близка к круглой.

II. Все сказанное выше было лишь подготовкой к основному вопросу: можно ли использовать лист Мёбиуса в качестве полей к шляпе? Задача сводится к тому, чтобы приделать край листа или, точнее, часть края к цилиндру, поскольку часть шляпы, окружающая голову, имеет форму цилиндра. При внимательном изучении становится очевидным, что как бы мы ни искривляли и ни обрезали край полого цилиндра, его нельзя полностью соеднинить с краем листа Мёбиуса, поскольку последний перекручен. Сделайте просто шляпу, которая выглядела бы достаточно разумно и была бы, если возможно, довольно красивой.

18. Бассейн и флаги. У одного человека был круглый бассейн 100 футов в поперечнике и два флага, которые он решил поставить на краю бассейна таким образом, чтобы кратчайшее расстояние между ними (измеренное вдоль края) так же относилось к большему расстоянию, как это большее расстояние — ко всей длине окружности (рис. 13). Только этот человек успел поставить первый флаг, как пришел его приятель (математик) и принес третий флаг.

— Теперь, — сказал приятель, — мы должны расположить флаги таким образом, чтобы расстояние между первым и вторым флагами относилось к расстоянию между вторым и третьим флагами, как это последнее к первому и второму расстояниям, вместе взятым. Более

того, боюсь, что второе расстояние должно относиться к третьему, как это третье ко второму и третьему, вместе взятым.

— Боже мой! — воскликнул владелец бассейна.— Куда же я должен воткнуть третий флаг?

— Я не могу тебе так сразу определить расстояние до него от второго флага,— сказал приятель.— Зато я

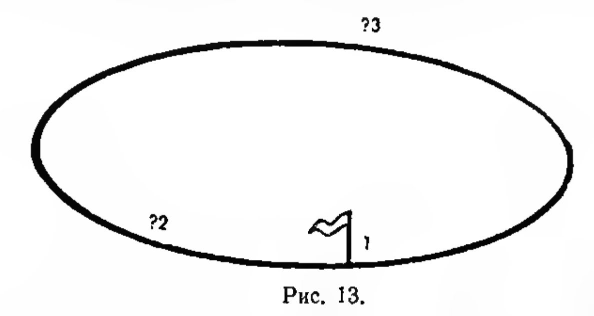


Рис. 13.

знаю, на каком расстоянии по прямой он должен находиться от первого флага.

Почему это расстояние легче определить и чему оно равно?

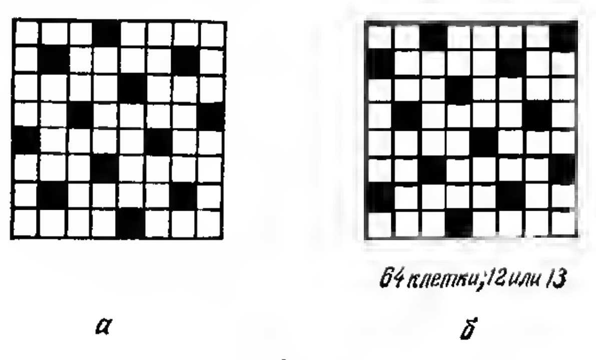


Рис. 14.

19. Бесконечная шахматная доска. На шахматной доске размера 8×8, изображенной на рис. 14, *а*, черные клетки расположены таким образом, чтобы из любой клетки можно было попасть в черную клетку ходом слона. Если мы сдвинем все черные клетки на одну клетку влево, то нам придется использовать 13 черных

клеток вместо 12 (рис. 14, *б*). На рис. 15 показано, что происходит на досках, содержащих 9, 16, 25 и 36 клеток. Можно заметить, что число черных клеток возрастает довольно нерегулярным образом. Вопрос заключается

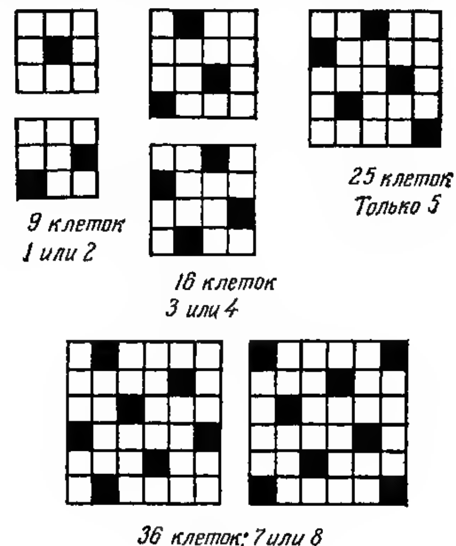


Рис. 15.

в следующем: какую долю составляют черные клетки на *бесконечно* большой шахматной доске?

20. Резиновые ленты. Коробку можно перевязать одной матерчатой ленточкой, не перекручивая ее, если мы считаем, что в тех местах, где ленточка перехлестывается, как показано на рис. 16, *а*, скручивания не происходит. Например, коробку можно перевязать способом, изображенным на рис. 16, *б* или *в* (узлом мы пренебрегаем). Но можно ли, исходя из тех же двух способов, перевязать коробку резиновой лентой? Разница заключается в том, что резиновая лента (например, аптекарская резинка) уже соединена в неперекрученную петлю до начала перевязывания, в то время как матерчатую ленточку мы завязываем узелком в конце. Мы требуем только, чтобы резиновая лента обвязывала коробку по схеме, приведенной на рис. 16, *г*. Что же

касается мест самопересечения x, то их можно сделать либо прямыми, как на рис. 16, *б*, либо с перехлестом, как на рис. 16, *в*.

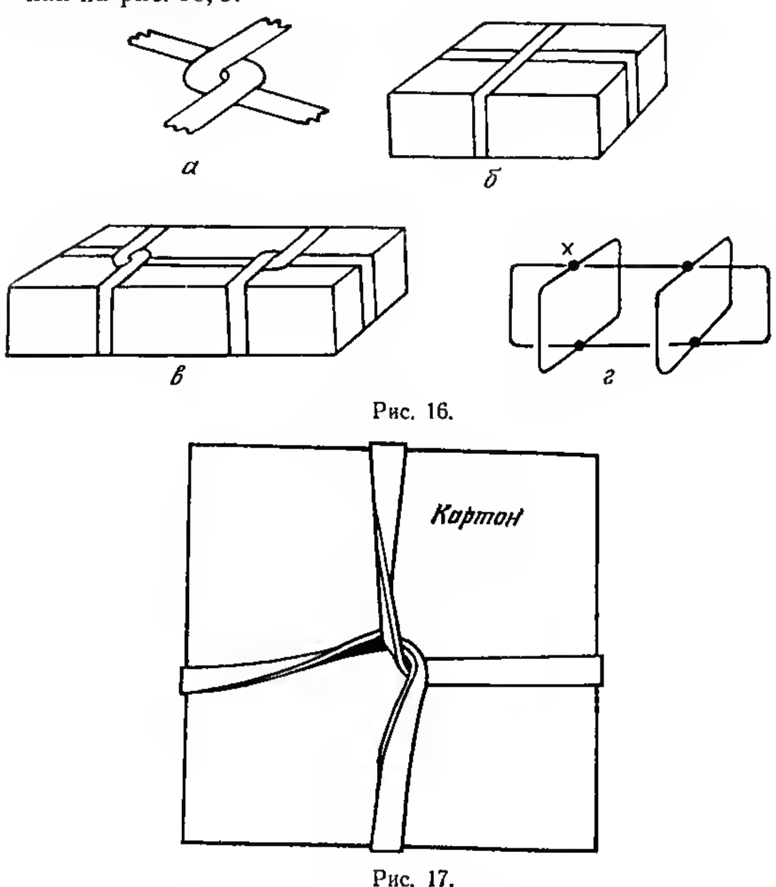


Рис. 16.

Рис. 17.

Для экспериментов возьмите широкую толстую резиновую ленту[1] длиной около 30 см (в нерастянутом состоянии) и вырезанный из толстого картона прямоугольник размером, скажем, 15×20 см. Перехлест на рис. 16, *а* по внешнему виду походит на перехлест на рис. 17, но нам удобнее будет считать, что на рис. 17 не

[1] Например, кусок эластичного бинта. — *Прим. перев.*

происходит перекручивания, поскольку сторона ленты, которая ранее была верхней, остается верхней и далее.

Чтобы читатель не тратил зря времени, мы сразу скажем, что с помощью способов, указанных на рис. 16, *б* и 17, обвязать коробку резиновой лентой без перекручивания нельзя; а с помощью способа, представленного на рис. 16, *г*, можно. Как это сделать?

21. Неправильный рост. Некий человек заметил, что одна его ресница растет под таким углом, что задевает глазное яблоко. Он вырвал ее пинцетом. Затем это стало повторяться вновь и вновь, причем через крайне нерегулярные промежутки времени, так что человек решил во всем разобраться. Между двумя предыдущими удалениями ресницы прошло 4 дня, но на этот раз интервал составил 12 дней. Далее — снова 12 дней, потом, к его удивлению,— 4 дня. Затем последовал долгий перерыв в 16 дней, потом — 4 дня, далее — 12 и наконец опять 12 дней.

— Ага! — воскликнул он. — Я понял, что происходит, и знаю, когда придется удалять очередную ресницу.

Когда же это придется сделать и почему?

22. Изобретательный реставратор. Реставратора попросили подновить испорченную фреску. Владелец сказал:

— Как видите, вся фреска покрыта пятнами. Правда, в большинстве своем они очень мелкие, и, я думаю, их следует оставить нетронутыми как свидетельство древности фрески. Однако вам следует удалить 10 или 15 самых крупных пятен, которые портят изображение неба, ибо напоминают навозных жуков или что-то в этом роде.

Реставратор сделал все, как его просили, но владелец, посмотрев на работу, заметил:

— Я вижу, вы еще не закрасили самые большие пятна.

Тем не менее 10 или 15 наибольших пятен было к тому времени удалено, и реставратор предложил полностью отреставрировать небо, удалив все пятна. На это владелец возразил, что тогда пришлось бы полностью реставрировать и остальную часть фрески, чего он не может себе позволить. В итоге реставратор еще раз

проделал аналогичную работу и с тем же результатом: *следующие* 10 или 15 наибольших пятен все так же выделялись на фоне неба.

Вопрос состоит в следующем. Пятна на фреске убывают по размеру от самых больших до мириадов микроскопических точек, сосчитать которые не взялся бы ни один человек. Реставратор понял, что, как бы долго ни продолжал он действовать подобным образом, всегда останутся очередные 10—15 наибольших пятен. Как же ему следует поступить?

23. Криптарифм. Криптарифм представляет собой головоломку, в которой над числами выполняются арифметические действия, например сложение или умножение, но цифры зашифрованы буквами. Требуется восстановить все числа, участвующие в головоломке. Простейшим примером служит «криптарифм на умножение»

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} A \\ A \end{array} \\ \hline A \end{array}$$

Поскольку одинаковыми буквами обозначаются одинаковые цифры, мы заключаем, что $A = 1$, ибо только 1 удовлетворяет данному равенству [1].

Иногда вместо цифр ставятся и другие символы. Так, например, в приведенном ниже криптарифме вместо всех зашифрованных цифр ставится точка. Известно также, что у этой задачи ответ единствен. (Цифрой 1 обозначена, разумеется, единица.) Восстановите все цифры.

```
      × . .
        . .
      -----
      . . .
    . . .
    -------
    . . . .
  +   1 . .
  ---------
  . . . . .
```

24. Человек и пояс. Один человек имел обыкновение, отправляясь в дорогу, скатывать пояс от купально-

[1] Здесь автор молчаливо предполагает $A \neq 0$. — *Прим. перев.*

го халата. Один конец этого пояса был срезан под углом 45°, что раздражало нашего владельца, поскольку из-за этого толщина рулона в поперечном направлении становилась неравномерной. Человек пытался сложить конец пояса так, чтобы придать ему прямоугольную форму.

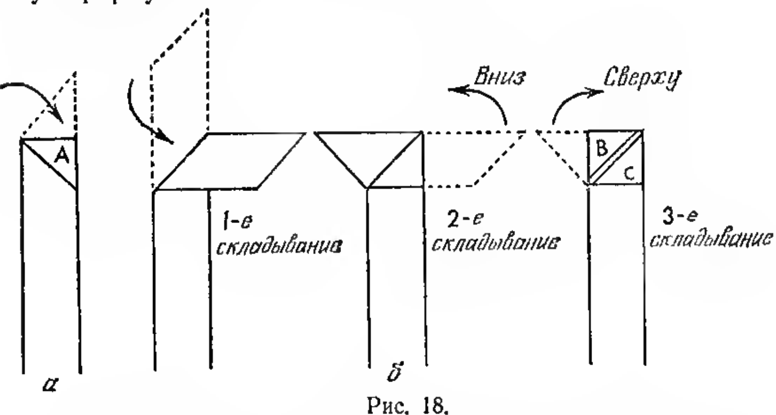


Рис. 18.

Просто загнуть конец, как показано на рис. 18, *а*, нельзя, поскольку удвоенная толщина приходится на непрямоугольный участок *A*. Способ, представленный на рис. 18, *б*, тоже не годится, так как, хотя теперь утолщение и принимает прямоугольную форму, на участок *B* приходится 2 слоя, а на участок *C* — 3 слоя. Ряд других манипуляций тоже не привел к цели. Как же человек в конце концов справился с этой задачей?

A •—	H ••••	O ———	V •••—
B —•••	I ••	P •——•	W •——
C —•—•	J •———	Q ——•—	X —••—
D —••	K —•—	R •—•	Y —•——
E •	L •—••	S •••	Z ——••
F ••—•	M ——	T —	
G ——•	N —•	U ••—	

Рис. 19.

25. **Азбука Морзе.** Взгляните на международную азбуку Морзе на рис. 19. Учить ее наизусть довольно

скучно; а поскольку научиться посылать с ее помощью сообщения легче, чем научиться их принимать, то лучше начинать с последнего. Для отправителя приведенная выше таблица выглядит вполне логично, ибо буквы на ней расположены в алфавитном порядке, но для человека, получающего сообщения, они мало пригодны. В каком же порядке следует расположить символы так, чтобы, получив сигнал, мы могли, не теряя времени, определить, какой букве соответствует данный символ? (Пунктуацией, цифрами и т. п. мы пренебрегаем.)

26. Полускрытые весы. На рис. 20 горизонтальная линия изображает невесомое коромысло, точка опоры которого расположена в *F*. Длина правого рычага коромысла неизвестна, длина левого рычага равна 1 м, к

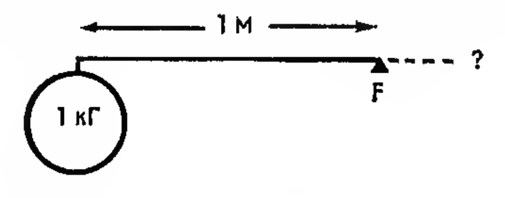


Рис. 20.

тому же на его конце подвешен груз в 1 кг. Коромысло способно удерживать любой вес, а поскольку оно находится в равновесии, на его правом конце тоже висит некий груз. Чем дальше расположен правый груз от точки опоры, тем меньшим он должен быть. Каковы наибольшая и наименьшая границы для суммарной силы, с которой коромысло давит на точку опоры *F*?

27. Звездоподобный тетраэдр. Назовем *звездоподобным* правильным многогранником фигуру, которая получится из обычного правильного многогранника, если на каждой его грани как на основании построить правильную пирамиду (на каждой грани одинаковую). Так, на рис. 21 изображен звездоподобный куб; он имеет 24 грани, а не 6, как обычный куб. Легко заметить, что к каждому ребру исходного куба примыкает теперь по две грани, образующих двугранные углы вроде α (которые тоже примыкают друг к другу); это — общее правило.

В нашем определении ничего не говорится о высотах пирамид, кроме того, что все они равны между собой. Если мы возьмем звездоподобный тетраздр. или «рододендраздр» (рис. 22), и начнем уменьшать высоту

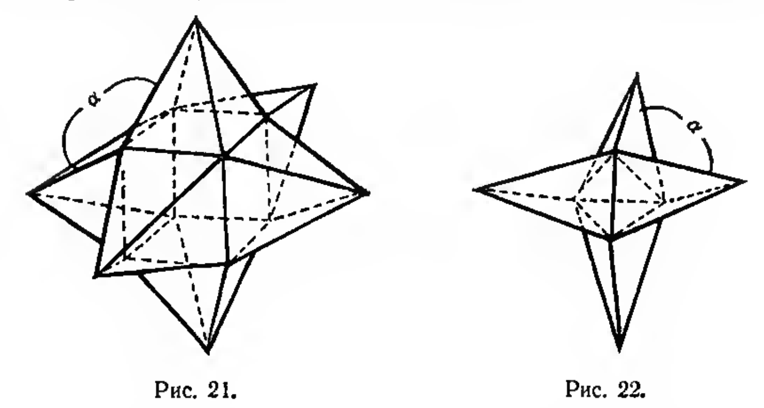


Рис. 21. Рис. 22.

соответствующих пирамид, то, очевидно, углы будут возрастать. В какой-то момент они станут равны 180°. Как называется (на обычном математическом языке) такой звездоподобный тетраэдр?

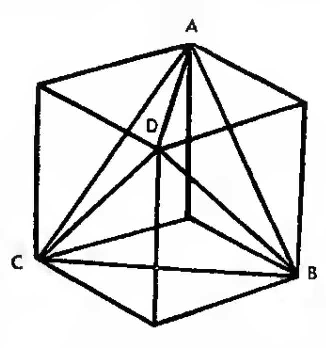


Рис. 23.

28. Тетраэдр в кубе. На рис. 23 изображен наибольший тетраздр, содержащийся в некотором кубе. Ребро куба имеет длину 1, так что длина ребра у тетраэдра равна $\sqrt{2}$. Не пользуясь карандашом н бумагой и ничего не достраивая на приведенном рнсунке, определите

объем тетраэдра *ABCD*. Это означает, что задачу решать вы должны, используя только простые геометрические рассуждения и соотношения.

29. Разрезание квадрата. Разрежьте квадратный лист бумаги на 20 одинаковых частей с помощью прямых разрезов. Части разрешается переворачивать обратной стороной кверху. Однако запрещено проводить разрезы параллельно какой-нибудь стороне квадрата (в противном случае мы могли бы разрезать квадрат на любое число полосок с параллельными сторонами).

30. Ненадежное приспособление. Какое простое приспособление, которое есть в большинстве домов, описывает, если что-то не ладится, точную эллиптическую траекторию? Заметим, что речь идет не о части машины или какого-нибудь домашнего прибора, а об очень простом приспособлении. Кроме того, здесь совсем не участвуют стены или другие вертикальные поверхности. Теоретически траектория проходит точно по эллипсу. Практически при нормальных условиях она очень близка к эллиптической. Определите, какая именно часть какого приспособления и при каких обстоятельствах описывает эллиптическую траекторию?

31. Зимняя фотография.

Безмолвный лес, и пасмурное небо,
И все деревья голы, только пихта,
Над всеми возвышаясь, зеленеет.
На ней еще остались шапки снега:
На верхних ветках больше, а на нижних
Его уж нет, как и на всех деревьях.
Так что же можем мы сказать о ветре —
Каков он был и был ли он вообще
С тех пор, как выпал белый снег на землю?

32. Головоломки с веревками. На рис. 24 изображена непрерывная (замкнутая, то есть не имеющая концов) веревочная петля, частично закрытая круглой пластиной. Мистер M. видит только ту часть петли, которая не видна на рис. 24, и не может сказать нам, есть ли на ней узел. Мистер N. видит всю петлю и утверждает, что на ней есть один простой узел. Нарисуйте, что находится под пластиной.

На рис. 25 изображены две веревки (не петли, ибо каждая из них имеет два конца), причем конец В пройдет сквозь *А*, как указывает стрелка. Если мы теперь все туго затянем, то что за узел получится в результате? Ответьте на этот вопрос, не прибегая к веревке.

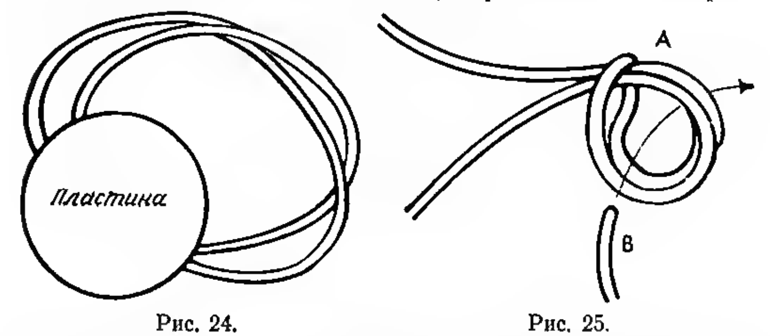


Рис. 24. Рис. 25.

33. 97 %. Эту головоломку нужно решить в уме, не пользуясь карандашом и бумагой, причем на размышление дается 10 секунд. Если из некой партии кофе удалено 97 % содержащего там кофеина, то сколько чашек такого кофе следует выпить, чтобы получить ту же порцию кофеина, которая содержится в одной чашке обычного кофе?

34. Человек ... в молочном пакете. Восковая копия человека, рост которого равен 1 м 66 см, а вес 80 кг, сделанная в натуральную величину, помещена в сосуд, размеры которого находятся в том же отношении, что и у литрового пакета из-под молока (рис. 26). Поскольку фигура сделана из воска, ее можно растопить. Попробуйте оценить с точностью не менее 10 %, сколько еще таких растопленных восковых «людей» поместится в этом же сосуде. (Постарайтесь сделать это, не производя

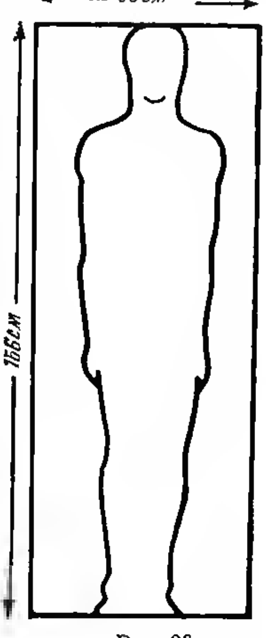


Рис. 26.

измереиий иа чертеже, а пользуясь только самыми общеизвестными фактами, например что высота литрового пакета равна 16 см 6 мм.)

35. Из пяти квадратов — один. Фигуру, изображенную на рис. 27, требуется разрезать на части, из которых затем нужно составить квадрат. Сама фигура составлена из 5 квадратов, объединенных вместе. Задачу нужно решить, разрезав фигуру на 3 части и притом

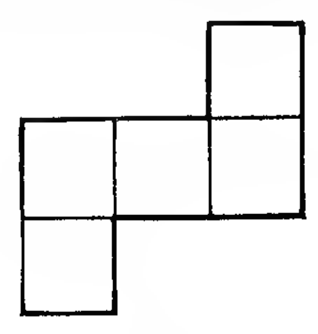


Рис. 27.

сделав лишь 2 прямолинейных разреза. Проведя первый разрез, вы не можете сдвигать полученные части — оии должны остаться в прежнем положении. (Немецкий математик Гильберт доказал, что с помощью коиечиого числа разрезов можно преобразовать произвольный миогоугольиик в любой другой многоугольиик, равновеликий первому, ио при этом число частей может оказаться очень большим [1]. В нашей же задаче должно быть 3 части и 2 разреза.)

36. Решите в уме. Эту головоломку нужно решить в уме, причем решение надо получить с помощью простых геометрических и арифметических рассуждеиий, не пользуясь чертежами. Делая это иначе, вы усложните решение настолько, что задача станет подходящей для пособия по геометрии.

---

[1] Этот факт был установлеи задолго до Гильберта. См. Лиидгреи Г. Заиимательные задачи иа разрезаиие. — М.: Мир, 1977, с. 251—252. — *Прим. ред.*

Многогранником, *двойственным* к данному, называется такой многогранник, вершины которого совпадают с центрами граней исходного многогранника. (Под центром мы здесь понимаем точку, отвечающую центру тяжести выполненной из картона грани. Так, например, центр квадрата — это точка пересечения его диагоналей, центром треугольника служит точка пересечения его медиан и т. д.)

Вопрос заключается в том, чтобы указать, чему равен объем многогранника, двойственного к правильному тетраэдру единичного объема.

37. Строго геометрически. Данная головоломка, подобно многим другим в этом сборнике, предъявляет

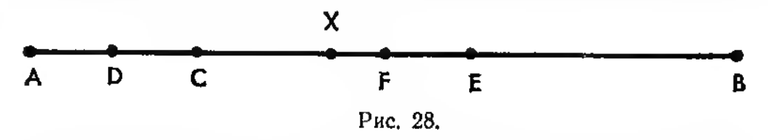


Рис. 28.

определенные требования к способу ее решения. Ее можно очень просто решить алгебраически, однако требуется найти чисто геометрическое решение, к тому же не нуждающееся в дополнительных построениях.

На отрезке AB произвольно располагается точка C (рис. 28). Затем строится точка D так, чтобы $AD = CD$; далее строятся точки E и F, для которых выполняются соотношения $CE = BE$, $AF = BF$, и наконец строится такая точка X, что $CX = 2FX$.

Докажите, что $BX = 2DX$ и $AX = 2EX$.

38. Распознавание. В архитектурных чертежах широко используются ортогональные проекции (в них отсутствует перспектива), позволяющие нам распознать объект, который они представляют. Однако объекты непривычной формы порой с трудом поддаются такому распознаванию. Так, на рис. 29, *а* изображен куб, от которого отрезан треугольный клин. Все три его ортогональные проекции одинаковы (рис. 29, *б*). Только по этим проекциям восстановить наше тело было бы нелегко.

На рис. 30 показаны три проекции некоторого тела, которое требуется распознать. При этом соблюдаются

следующие правила. Прямые линии изображают только ребра многогранников (а не вид, например, плоскости «сбоку» и не изолированные линии, вроде натянутой

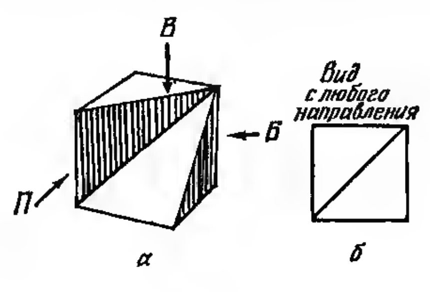


Рис. 29.

проволоки). Кроме того, если какое-то ребро нам не видно, его надо изображать пунктиром. В принципе по-

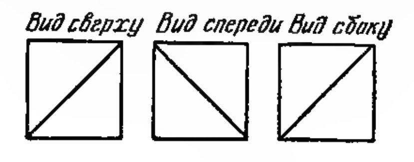


Рис. 30.

верхности могут быть искривленными, но в нашем случае тело ограничено исключительно *плоскими* гранями.

39. Пирамиды майя. Недавно в Табаско были обнаружены три весьма примечательные пирамиды майя. Они касаются друг друга, как показано на рис. 31, и, кроме того, очень пологи — их грани наклонены к горизонтальной плоскости под углом всего лишь 30°. Установив это, исследователь сфотографировал пирамиды со стороны озера так, чтобы на фотографии получилось их отражение в спокойной воде. Отъехав достаточно далеко на лодке, он воспользовался телеобъективом. При этом внешние боковые грани пирамид *A* и *B* зрительно слились с внешними гранями пирамиды *C*. Камера во время съемки располагалась у самой поверхности воды, отчего на фотографии получилась ортогональная проек-

ция пирамиды и ее отражения без каких-либо ощутимых перспективных искажений.

Что представляет собой на фотографии треугольник, образованный вершинами меньших пирамид A и B и

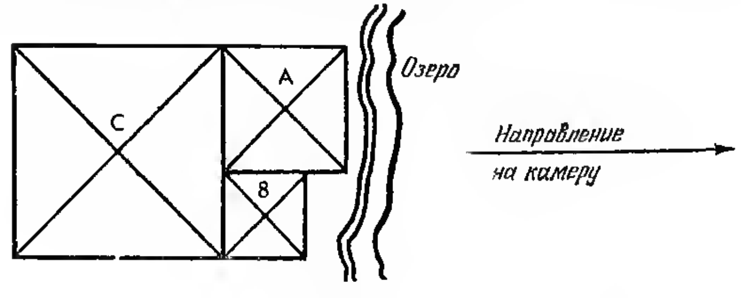


Рис. 31.

отражением вершины C большей пирамиды? Обоснуйте ваше утверждение.

40. Скоростной тест. Вот еще одна головоломка, для решения которой отводится ограниченное время. Напишите, что стоит в правой части данного равенства

$$\frac{1\,234\,567\,890}{(1\,234\,567\,891)^2-(1\,234\,567\,890\times 1\,234\,567\,892)}=?$$

Пользоваться какими-либо вычислительными машинами не разрешается. Времени на решение задачи — 4 минуты.

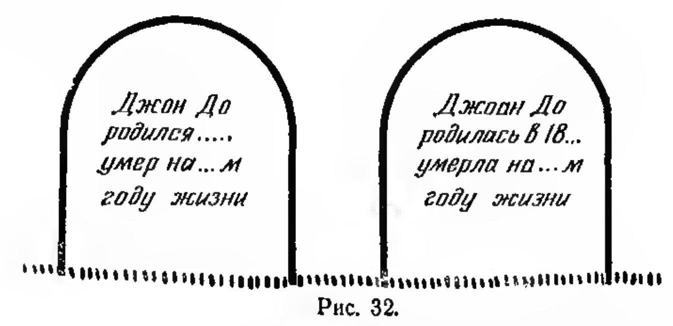


Рис. 32.

41. Два могильных камня. На кладбище рядом возвышаются две могильные плиты. Часть нанесенных на них цифр стерлась от времени (рис. 32). Но из семейных

писем явствует, что и Джоан, и ее брат Джон умерли в раннем детстве и что единственная цифра в нижней строке надписи на камне Джона на единицу меньше соответствующей единственной цифры на камне Джоан. Однако известно, что Джон жил дольше, чем Джоан. Ошибка в семейных письмах исключена. Укажите с ошибкой не более чем в 3 года год рождения, указанный на одном из могильных камней.

42. Денежная афера. Существует хорошо известный тип трюков или парадоксов, известных как геометрическое исчезновение. В них группу каких-то одинаковых

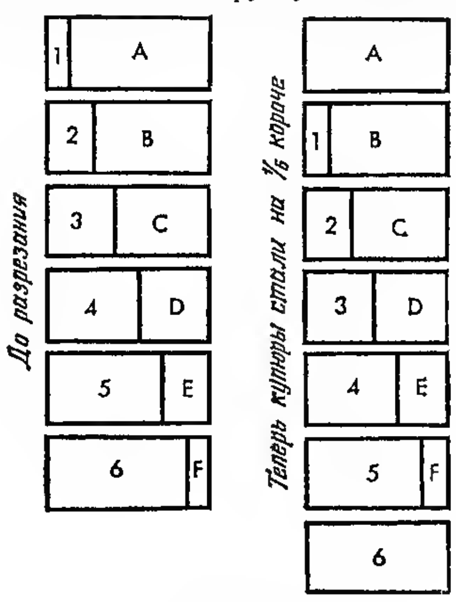


Рис. 33.

по форме объектов (обычно бумажных) разрезают на части и манипулируют этими частями таким образом, что в итоге один из объектов кажется исчезнувшим. Мы займемся обратной задачей, в которой лишний объект, так сказать, «материализуется из ничего». Этот трюк использовался мошенниками, чтобы сделать, скажем, из 50 денежных купюр 51. При этом купюры разрезались на части, а затем аккуратно склеивались, как показано

на рис. 33 (для простоты здесь изображено 6 купюр). (Согласно банковским правилам, разорванную купюру разрешается склеивать, хотя банки всегда относятся к подобным вещам с подозрением.) Как вы видите, каждый следующий разрез сдвигается по сравнению с предыдущим разрезом вправо. Затем все левые части сдвигаются вниз и склеиваются с соответствующими правыми частями. Идея состоит в том, что малая потеря в каждой купюре пройдет незамеченной, а в результате появится новая купюра. Однако бумажные деньги перенумерованы, и серийные номера все различны между собой [1]. Негодяй замыслил изменить все номера одновременно, но банк обнаружит любое повторение номеров. Мошенник может получить пачку банкнот только с последовательными номерами, но *число цифр в каждой купюре* может меняться. Чтобы делать разрезы еще ближе друг к другу, число купюр можно увеличить. Какой наилучшей стратегии должен придерживаться мошенник, дабы получить лишнюю купюру с неповторяющимся номером? Пройдет ли эта стратегия на самом деле? *Какой номер будет у новой купюры?*

43. Лягушка и угол. Лягушка сидит в пруду, причем ее глаз E находится как раз у поверхности воды около

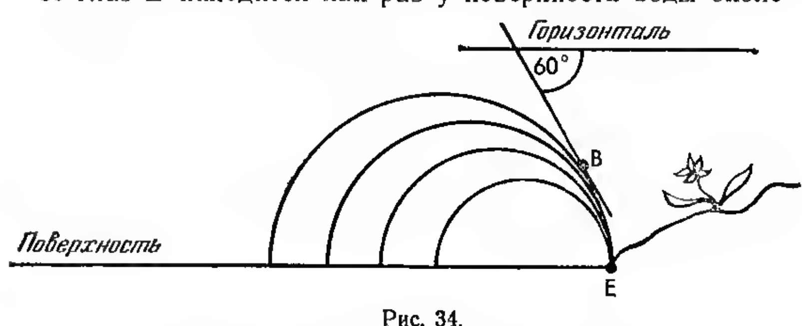


Рис. 34.

самого берега. Она выдувает пузырь, который растет, все время оставаясь при этом правильной полусферой (дыхания у лягушки как раз хватает на эту работу).

[1] Представьте себе, что дело происходит в стране, где на купюрах номер проставляется только один раз (а не с двух концов купюры, как обычно).

Причем пузырь расположен у самого берега и, значит, может распространяться только влево, что на рис. 34 отмечено с помощью полуокружностей. Бабочка-однодневка все время находится в точке B, расположенной над самым пузырем на вертикальной дуге, проходящей через точку E, и такой, что касательная к этой дуге в точке B образует с горизонталью угол в 60°. Лягушка неотрывно следит за маневрами бабочки. Увеличивается или уменьшается при этом угол, под которым лягушка видит бабочку?

Ответ следует дать, не пользуясь карандашом и бумагой.

44. Скользящий треугольник. Твердое тело в форме равностороннего треугольника PXY лежит на двух клиньях A и B. Треугольник может скользить по наклонным плоскостям этих клиньев, расположенным под

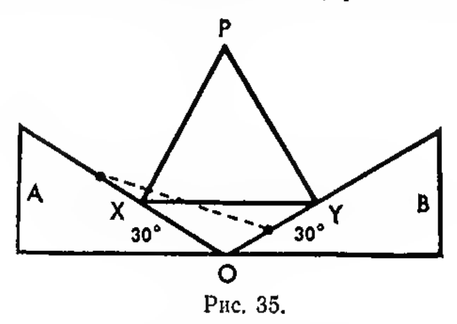


Рис. 35.

углом 30° к горизонтали, так что основание треугольника может наклоняться и занимать, например, положение, отмеченное на рис. 35 пунктиром. Наибольший наклон получается, когда либо точка X, либо точка Y попадают в положение O.

Какую траекторию описывает точка P, когда треугольник перемещается из одного крайнего положения в другое? (Приведите доказательство [1].)

45. Короткий палец. Сравнение рентгеновских снимков показало, что у некоего человека один палец на

[1] Существуют различные доказательства, с одним из которых мы уже встречались ранее.

руке чуть-чуть короче соответствующего пальца на другой руке, но разница эта столь мала, что обнаружить ее, складывая вместе ладони рук, не удается. Однако, прижимая специальным образом кончики пальцев друг к другу, человек может обнаружить укороченный палец по более слабому давлению. Каким образом следует ему действовать, чтобы обнаружить короткий палец за наименьшее число сравнений? Чему равно это наименьшее число?

46. Трубопровод. На рис. 36 схематически изображен трубопровод, снабжающий дом жидким топливом. Около дороги на холме установлен бак, от которого трубы спускаются вниз к дому. Масштаб на рисунке не соблюден, однако все размеры и высота подъема над уровнем *D* указаны правильно. Верхний бак содержит

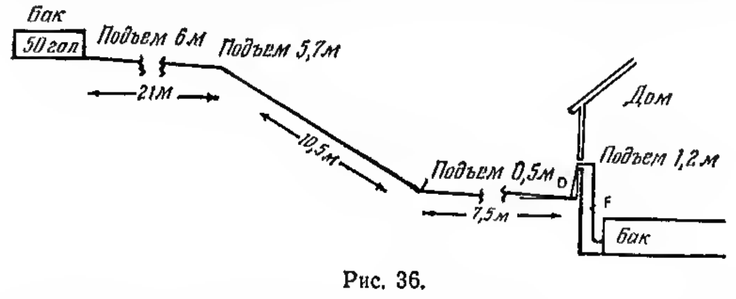


Рис. 36.

50 галлонов[1] топлива, а в трубах на каждые 3 м его приходится по одному галлону. Когда нужное количество топлива было доставлено в нижний бак, кран *F* перекрыли, так что верхний бак и трубы оказались наполненными. Если теперь нижний бак опустеет и мы откроем кран, то в итоге сколько топлива окажется в доме?

47. Концы параграфов. Некий манускрипт был напечатан на узких листах бумаги. В нем имелось какое-то число окончаний параграфов, оставшееся неизменным и после того, как текст перепечатали на более широких листах, ибо число параграфов не зависит от ширины листов. Однако, поскольку листы стали шире,

[1] 1 галлон — около 4,5 л.

общее число строк уменьшилось, так что увеличилось отношение числа концов параграфов к числу полных строк.

В ряде мест в манускрипте случилось так, что конец параграфа приходился как раз на конец полной строки. Спрашивается: что произошло с долей таких совпадений после того, как текст перепечатали: возросла она, уменьшилась или осталась без изменений?

48. Последовательность последних цифр. Рассмотрим числовую последовательность 1^1, 2^2, 3^3, 4^4 ... и т. д. Запишем члены этой последовательности в обычном виде 1, 4, 27, 256, ... и т. д. Последние цифры этих чисел образуют новую последовательность 1, 4, 7, 6, ...

Как эта последовательность продолжается дальше? Другими словами, какую последовательность образуют последние цифры чисел n^n, где n — последовательные натуральные числа?

49. Площади трапеций. На рис. 37 положение вещей таково, каким кажется на первый взгляд: центры

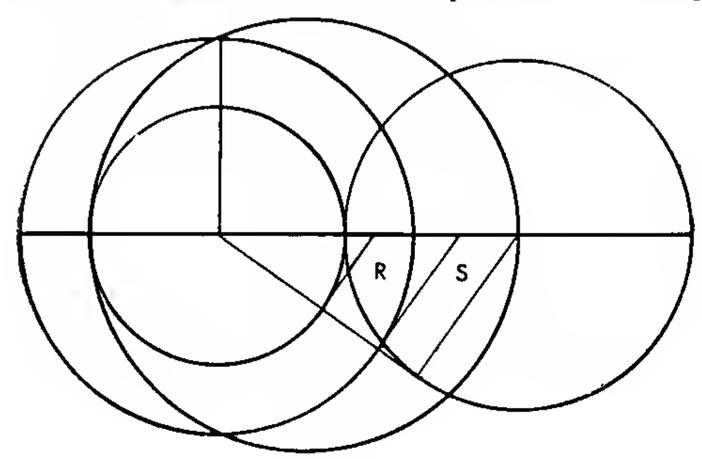


Рис. 37.

кругов расположены на горизонтальной прямой именно там, где, как нам кажется, они должны находиться; углы, которые кажутся прямыми, действительно равны 90°; прямые, похожие на касательные к окружностям,

действительно касаются последних; все линии пересекаются именно там, где нам кажется, что они пересекаются, и т. д.

Найдите отношение площадей трапеций R и S и обоснуйте ваш ответ. Для решения задачи достаточно воспользоваться широко известными теоремами элементарной геометрии.

50. Разрезание листа Мёбиуса. Мы назовем разрез на некоторой поверхности *поперечным*, если он начинается и заканчивается на ее крае (быть может, на одном и том же) и, кроме того, не имеет самопересечений. Мы

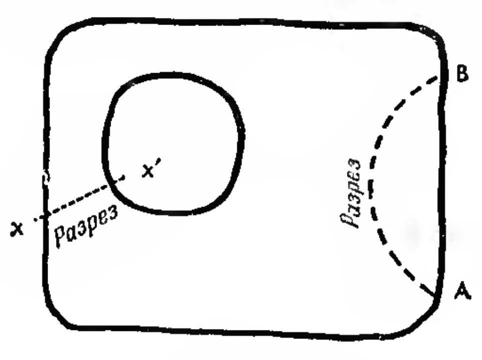


Рис. 38.

считаем край одним и тем же, даже если он изгибается под разными углами: например, у прямоугольного листа бумаги — всего один край. Если в этом листе вырезать дыру (рис. 38), то у получившейся поверхности будут уже два (несвязанных) края. Очевидно, что если поперечный разрез идет из A в B, то он разрезает лист бумаги на две части, а если разрез соединяет x и x', то в итоге получается снова только одна часть. Этот пример наводит на мысль, что, по-видимому, справедливо общее правило: если поперечный разрез соединяет точки одного и того же края, то поверхность разрезается на части, а если он соединяет разные края, то новых частей при этом не образуется.

На первый взгляд кажется, что это правило применимо и к листу Мёбиуса (рис. 39). Действительно, поперечный разрез, идущий из A в B, разрезает лист на две

части, а разрез, соединяющий x и x', не разрезает его. Однако в этом есть нечто странное: ведь у листа Мёбиуса — *всего один край*; так что оба указанных разреза принадлежат к первому типу (соединяют две точки одного и того же края).

Предположим, что мы постепенно передвигаем конечную точку B поперечного разреза вдоль края. До каких пор разрез будет разбивать лист Мёбиуса на две

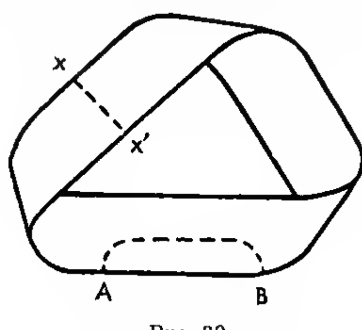


Рис. 39.

части? Или, иными словами, если мы будем передвигать вдоль края точку x', то начиная с какого момента разрез $x - x'$ начнет разбивать лист на две части? Не забывайте, что и сторона у листа Мёбиуса — всего одна.

51. Затруднение чертежника. Одному человеку нужно было начертить равносторонний треугольник. У него была чертежная доска, позволявшая ему строить прямые углы; кроме того, он располагал циркулем и прямой полоской, на которой мог отмечать расстояния. Никаких других инструментов у него не было. Поработав немного, чертежник в первый раз воспользовался циркулем и провел с его помощью одну дугу. После этого кто-то взял циркуль. Как же человек построил нужный треугольник?

52. Еще раз лист Мёбиуса. Вырежьте из листа бумаги полоску (рис. 40, *а*), перекрутите ее на пол-оборота и соедините концы так, чтобы точка A соединялась с A', а точка B — с B'. В результате получится лист Мёбиуса (рис. 40, *б*). Он имеет только один край, в чем

можно убедиться, проследовав взглядом вдоль края, и только одну сторону, что станет ясно, если провести по центру линию L, которая побывает на обеих «сторонах». Если разрезать лист вдоль L, то в результате получится один кусок, что не удивительно, поскольку (рис. 40, *а*) верхняя часть $A — B'$ соединена с нижней частью $B — A'$. Если разрезать лист Мёбиуса вдоль пунктирной линии X, то он распадается на две неравные петли.

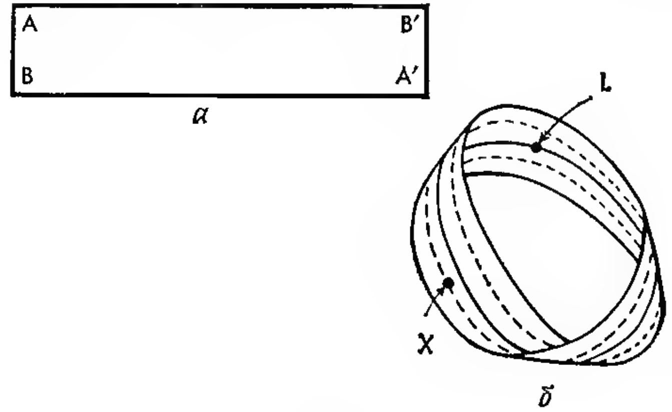


Рис. 40.

Задача состоит в том, чтобы провести прямую линию, которая начиналась бы *у края*, и такую, что если разрезать лист вдоль этой линии, то он распался бы на две *равновеликие* части. Приведите доказательство.

53. Сад Хокусаи. Хокусаи хотел разбить сад. «В японском саду,— сказал знаменитый художник,— непременно должен быть небольшой каменный мостик». Хокусаи спланировал сад так, чтобы мостик проходил не над ручьем, а над дорожкой, как показано на рис. 41. Две дорожки должны быть выложены полосками из блестящих плиток. Известно, что карту мира или любой воображаемой страны можно раскрасить четырьмя красками так, чтобы никакие два района с общей границей не имели одинакового цвета. Хирошиге, юный друг Хокусаи, сказал, что плитки будут выглядеть красивее, если их раскрасить наподобие карты: любые две

соприкасающиеся плитки должны быть покрашены в разные цвета. Легко заметить, что внутренние и внешние полоски обеих дорожек вместе образуют одну непрерывную полосу и, следовательно, должны быть покрашены в один цвет. Задача состоит в том, чтобы рас-

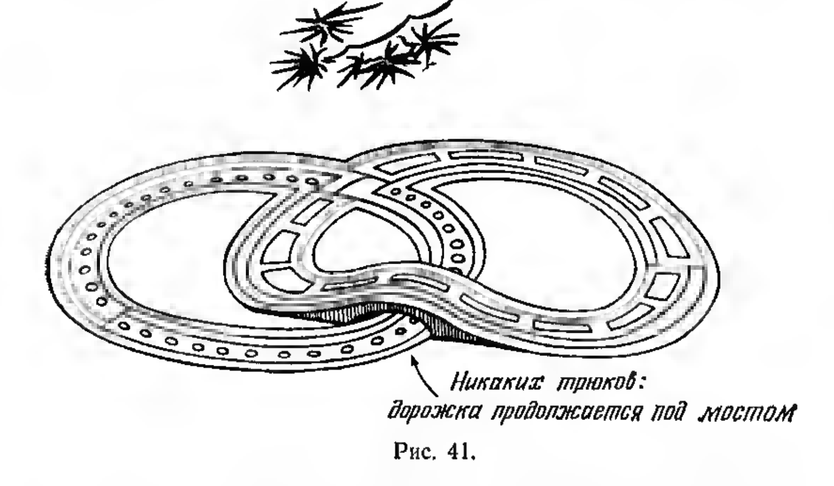


Рис. 41.

красить рисунок (или перенумеровать области), используя наименьшее возможное число красок, и дать подробное обоснование выбора именно такого числа.

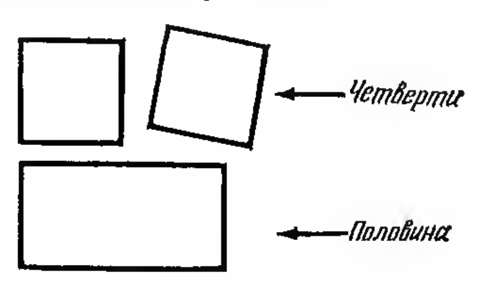


Рис. 42.

54. Квадратная пицца. У одной щедрой девочки была квадратная пицца[1] (только что купленная в кондитерской), которую она решила разделить с тремя

[1] Национальное итальянское блюдо. — *Прим. перев.*

друзьями. Поэтому она разрезала ее пополам, затем одну из половинок разрезала снова пополам и собиралась так же поступить и со второй, неразрезанной, половиной, когда один из друзей сказал, что пицца ему не нравится. На рис. 42 показано, что представляла собой пицца к этому моменту. Теперь уже девочке предстояло разрезать пиццу на три равные части. Решите (в уме), чему равно наименьшее число прямолинейных разрезов, которые должна сделать девочка, и как их следует провести?

55. Два зеркала. Человек сидит в большом кабинете, глядя в расположенное прямо перед ним стенное зеркало *A*. Сзади него находится стенографистка, которая сначала отражается в другом зеркале *B*, параллельном *A*, и это отражение человек видит отраженным в *A*. Второе отражение в отличие от первого отражения в *B*, разумеется, не меняет у стенографистки местами правую и левую стороны. В данный момент стенографистка удаляется от человека, и он наблюдает весьма странный факт: ее второе отражение в зеркале *A также* удаляется от него. Как расположены эти зеркала? Если необходимо, можете привести чертеж. («Параллельное» означает, что допустима ошибка в 5°.)

56. Разрезание куба. Плотник хочет распилить дисковой пилой куб высотой 3 см на 27 кубиков высотой 1 см каждый. Как видно из рис. 43, это можно сделать с помощью шести разрезов. Вопрос состоит в том, можно ли уменьшить число разрезов, если после любого разреза разрешается перекладывать части. Как это сделать?

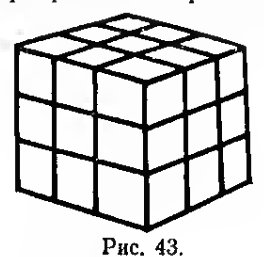


Рис. 43.

Эту головоломку примерно в той же формулировке публиковал в журнале Scientific American Мартин

Гарднер. Там же давался ответ, что уменьшить число разрезов нельзя, поскольку у центрального кубика образуется 6 новых граней, для чего требуется «шесть проходов» пилы [1]. Было упомянуто, что доказательство этого и более общего фактов найдено несколькими крупными математиками. Тем не менее мы довольно самонадеянно вновь ставим эту задачу.

57. Ящик и кривая. Прямоугольный ящик высотой 20 см и глубиной 15 см стоит на полу вплотную к стене *W* (рис. 44). Человек тянет на себя нижнюю часть коробки, причем край *D* все время скользит вниз по стене,

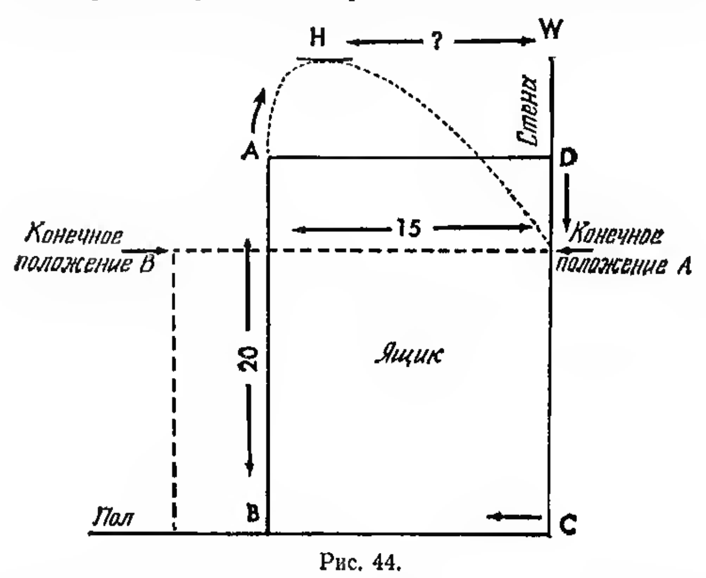


Рис. 44.

а край *C* — вперед по полу, как показано стрелками. Верхний край *A* движется последовательно вверх, к стене и вниз, описывая некоторую кривую, отмеченную на рисунке пунктиром, и останавливается, когда ящик оказывается лежащим на полу. На каком расстоянии находится наивысшая точка кривой от стены? (Времени дается на размышление 3 минуты.)

[1] Ср. Гарднер М. Математические головоломки и развлечения. — М.: Мир, 1971, с. 38—39.

58. Проколотый тор. Мы видели, что в головоломке 53 сад Хокусаи был эквивалентен тору с дыркой, из-за которой появился край,— у непроколотого тора, как у целой велосипедной камеры, вообще нет края. На

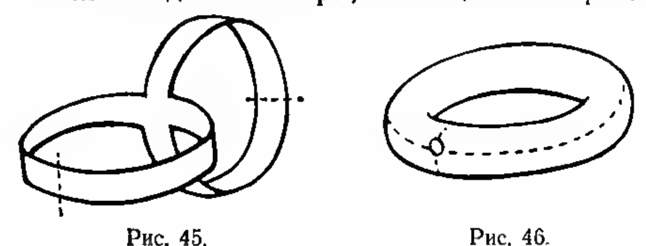


Рис. 45. Рис. 46.

рис. 45 показан один из моментов расширения такого отверстия, причем полученная поверхность сохраняет следующие характеристики проколотого тора:) у нее две стороны; 2) у нее один край; 3) на этой поверхности

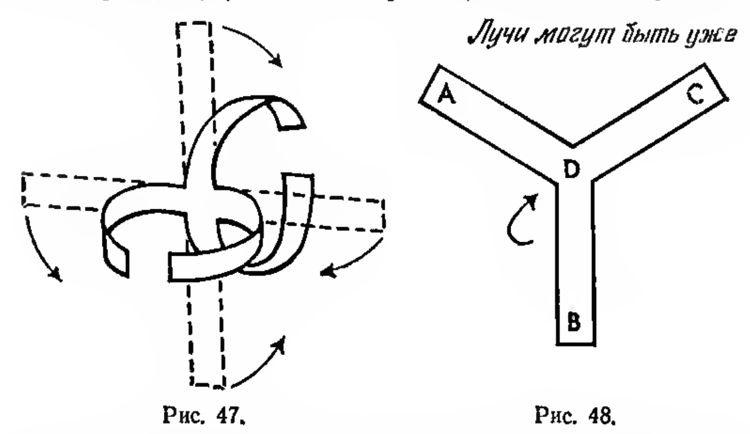


Рис. 47. Рис. 48.

существует карта, для раскрашивания которой требуется семь цветов: 4) *число Бетти такой поверхности равно 2.* (Нам достаточно понимать под числом Бетти число поперечных разрезов — см. головоломку 50,— не разбивающих поверхность на две части[1].) На рис. 46

[1] Разумеется, число всех разрезов бескоиечио. Автор здесь имеет в виду, что иа поверхиости есть два разреза, обладающих нужиым свойством и таких, что их иельзя перевести друг в друга «иепрерывной деформацией»; кроме того, иет большего числа таких не сводимых друг к другу разрезов. — *Прим. перев.*

показан еще не растянутый проколотый тор, пунктиром на нем отмечены два поперечных разреза, не разбивающие поверхность на две части. На рис. 45 пунктиром показаны те линии, в которые переходят наши разрезы после деформации тора. Фигуру, изображенную на рис. 45, можно сделать из бумажного креста (рис. 47). Первая часть нашей головоломки состоит в том, чтобы сделать из «трехлучевой» фигуры, изображенной на рис. 48, поверхность, обладающую всеми четырьмя перечисленными выше характеристиками, которая была бы симметричной относительно какой-то оси. Нельзя, например, просто склеить A с B, а C перевернуть и склеить с D, поскольку при этом получился бы несимметричный вариант рис. 45.

59. Безумные двоичные цифры. Некогда в английском языке двойное отрицание употреблялось для усиления какого-нибудь утверждения [1], но позже возобладал более математический подход, и теперь два отрицания означают утверждение. Быть может, кому-то покажется, что два утверждения означают отрицание, но, увы, это не так: они тоже означают утверждение. С другой стороны, комбинация утверждения и отрицания, взятая в любом порядке, означает отрицание; например, сравните две фразы: „Мой ответ *есть* «нет!»“ и „Мой ответ *не* есть «да!»“. Обе они означают «нет».

Математическая логика, кажется, приняла эти правила близко к сердцу: $(-1)\times(-1)=+1$; $(+1)\times(+1)=+1$; $(+1)\times(-1)=-1$ и $(-1)\times(+1)=-1$. На эти соотношения можно взглянуть чуть под другим углом, если мы введем элементы *согласие* и *несогласие*, которые мы будем представлять соответственно числами 1 (для согласия) и 0 (для несогласия). Правила «умножения» останутся теми же: $0\cdot 0=1$; $1\cdot 1=1$; $1\cdot 0=0$; $0\cdot 1=0$. Начнем выписывать строку из этих символов (совершенно произвольно), и пусть

[1] В русском языке и сейчас это — совершенно обычное явление. Например, сравните фразу: «Нам *не* нужно брать с собой *никаких* вещей». В английском языке для выражения той же мысли потребовалось бы только одно отрицание, и буквальный перевод звучал бы примерно так: «Нам не нужно брать с собой каких-либо вещей». — *Прим. перев.*

для определенности она начинается с 1. Запишем снизу и левее ее еще одну единицу:

$$\begin{matrix} & 1 \\ 1 & \end{matrix}$$

Теперь заполним пустое место под первой единицей тоже единицей, ибо первые две единицы согласуются между собой $(1 \cdot 1 = 1)$:

$$\begin{matrix} & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

Если первая строка составлена из единиц, то, действуя только что описанным способом, мы получим весьма унылую картину:

$$\begin{matrix} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \end{matrix}$$

Однако если мы первую строку составим из одних нулей и первый элемент второй строки положим тоже равным нулю, то в результате картина оживится:

$$\begin{matrix} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots \end{matrix}$$

Действительно, первые нули двух строк согласуются между собой $(0 \cdot 0 = 1)$, и поэтому второй элемент второй строки равен 1. Однако эта единица *не согласуется* со вторым нулем первой строки $(0 \cdot 1 = 0)$, и поэтому на третьем месте во второй строке мы ставим 0, и т. д. *до бесконечности.*

Первый вопрос состоит в следующем. Если мы будем, согласно нашему правилу, выписывать под уже имеющимися строками новые строки (всегда начиная их с нуля), то с какого момента «рисунок» начнет вновь и вновь повторяться, подобно орнаменту на обоях?

60. Ролики. На рис. 49, *а* вы видите два одинаковых колеса, помещенных между двумя параллельными перекладинами; если скольжение отсутствует, то колеса могут катиться в любую сторону, сохраняя при этом свое относительное вертикальное расположение. То же самое оказалось бы верным и в случае двух одинаковых сфер,

расположенных между двумя параллельными плоскостями.

Если, однако, верхнюю сферу мы возьмем много больше нижней (рис. 49, *б*) и толкнем обе сферы в одну сторону, то которая из них уйдет вперед?

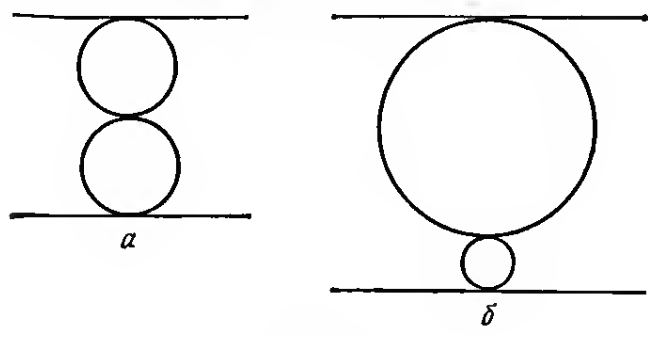


Рис. 49.

61. Совиные яйца. На Совином острове яйца имеют сферическую форму. Два человека как раз собирались сварить яйцо, когда один из них, чудак с математическими наклонностями, вдруг сказал:

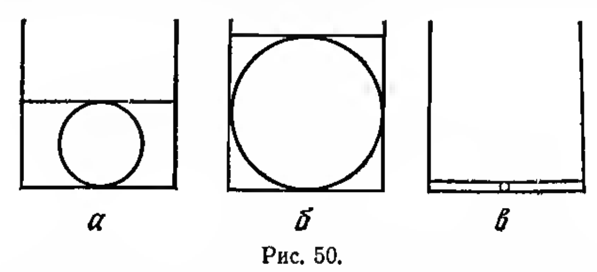


Рис. 50.

— Интересно, больше ли воды потребуется, чтобы покрыть большое яйцо, чем маленькое? Варить будем вот в этой кастрюле,— добавил он, указав на кастрюлю, которая представляла собой правильный цилиндр диаметром 4 дюйма.

Второй приятель заметил:

— Очевидно, под словом «покрыть» подразумевается, что вода достигает как раз верхней точки яйца (рис. 50, *а*). Поэтому, например, вокруг страусового

яйца останется не слишком много места (рис. 50, б), а вот чтобы покрыть муравьиное яйцо, потребуется всего лишь чайная ложка воды или и того меньше (рис. 50, *в*).

В этом приятели сошлись, однако каждый произвел свои измерения и вычисления. Чудак считал столь же хорошо, как и его приятель, но полагал, что $\pi = 3$. Приятель был лучше его осведомлен на этот счет, но использовал линейку, которая давала ошибку в 1 %, в то время как линейка чудака была в полной исправности. Каждый из них нашел радиус яйца, покрыть которое потребовалось бы максимальное количество воды. Кто из приятелей оказался наиболее близким к истине?

62. Кривая на конусе. Рассмотрим прямой круговой конус, у которого длина образующей $PA = 2$ (рис. 51),

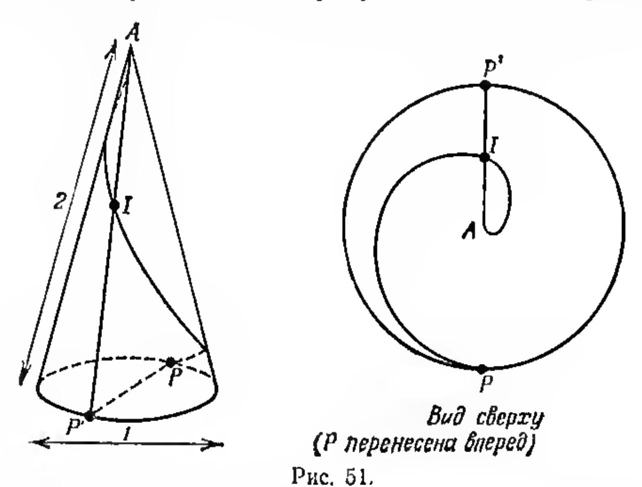


Рис. 51.

а диаметр основания равен 1. Некоторая кривая начинается в точке P, касаясь основания, делает один оборот и заканчивается вертикально в вершине конуса A, касаясь тем самым некоторой образующей. Образующая AP', где точка P' диаметрально противоположна точке P, рассекает нашу кривую на две равные по длине части, причем пересечение происходит в точке I под углом в 45°.

I. Какой вид имеет наипростейшее выражение, точно определяющее и описывающее эту кривую?

II. Какое отношение ко всему этому имеет «золотое сечение» φ [1]?

63. Флаг Совиного острова. Услышав про задачу о совиных яйцах, третий житель острова сказал, что эта задача навела его на мысль сделать флаг.

— Я хочу повесить этот флаг на дверь,— объяснил он.— Дверь имеет 4 фута в ширину, а рисунок на флаге должен представлять собой красный квадрат с белыми полосами по бокам.

И он набросал чертеж, приведенный на рис. 52.

— Здесь возникает та же проблема, что и в вашей дурацкой задаче о яйцах и воде (см. головоломку 62),—

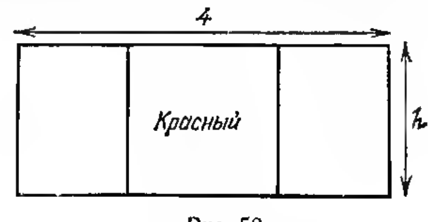


Рис. 52.

продолжил он.— Каковы должны быть размеры красного квадрата, чтобы площадь боковых белых полос была максимальной? Ширина флага в любом случае должна, разумеется, равняться 4 футам.

— Это вовсе не та же самая проблема,—возразил приятель.— В данном случае даже нет нужды в дифференциальном исчислении.

Ответьте, не прибегая к дифференциальному исчислению, при каком значении h площадь белых полос будет максимальной?

64. Псевдомёбиусов лист. Вырежьте две бумажные полоски, одну размером 1×11 см (А), а другую 1×10 см (B), и соедините их, как показано на рис. 53. До соединения с цилиндром B у полоски A было две стороны, два края, кроме того, она была перекручена на два пол-оборота. После соединения с B получилась фигура, у которой две стороны и один край.

[1] Относительно определения числа φ см. головоломку 86.

I. Если теперь мы разрежем фигуру вдоль пунктирной линии, то что получится в результате? Сколько теперь будет сторон, краев и перекручиваний? Ответ следует дать, не производя на самом деле разрезания вдоль пунктирной линии.

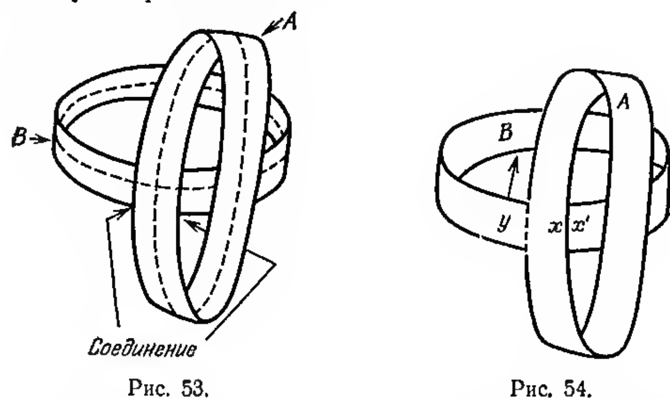


Рис. 53.

Рис. 54.

II. Для того чтобы ответить на этот вопрос, вовсе не обязательно быть ясновидцем. Если бы после соединения концов A и прикрепления x и x' мы передвинули y на 4 см в направлении, указанном на рис. 54 стрелкой, а уже *затем* разрезали бы нашу фигуру вдоль пунктирной линии, то как бы это повлияло на результат?

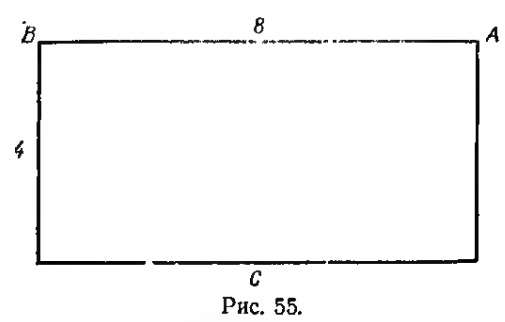


Рис. 55.

65. Дворецкий и крошки. Служанка только собиралась вытереть прямоугольный стол размером 4×8 футов, как ее остановил дворецкий, довольно педантичный человек, сказав:

— Чего тебе не хватает, девочка, так это системы!

И у служанки, и у дворецкого руки были слишком коротки: они могли дотянуться тряпкой только на 2 фута. Поэтому дворецкий решил собрать все крошки в точке C, расположенной в середине длииной стороны стола (рис. 55). Ои прошелся вдоль стороиы AB, сдвигая все крошки как можно дальше в направлении к C, а затем проделал то же самое с двух коротких сторон стола. Наконец он перешел ко второй длинной стороие стола и смел все крошки, собранные в точке C, в совок. Когда дворецкий это сделал, служанка ему возразила. Что она сказала ему и почему?

66. Трое часов. В воскресеиье я встал поздно и иашел на столе записку от жены: «Мне иужно уйти, вернусь к обеду. Поскольку дии стали короче, сегодня мы должиы были перевести свои часы, только я запамятовала, следовало ли перевести их на час вперед или на час иазад. Вот я и перевела одии из наших часов на час вперед, а другие назад. Третьи часы я не нашла. Знаю, что все часы шли правильно и были заведены до отказа вчера вечером».

У меия не было ии ручных часов, ни радио, ни телевизора, ии даже соседей, у которых я мог бы узнать время. Словом, мие пришлось полагаться только на себя. Я нашел одни часы и сумел определить по иим верное время. Как мне это удалось?

67. Разрезанные полоски. Если соединить концы бумажиой полоски так, чтобы при этом образовалась неперекрученная (цилиндрическая) петля, а затем разрезать ее вдоль по цеитру, то оиа распадется иа две подобиые же, но более узкне петли. Если перед склеиванием коицов перекрутить полоску на пол-оборота (в результате чего образуется лист Мёбиуса с одной стороной и одним краем), а затем разрезать получившуюся петлю вдоль, то получится только одна более длииная петля с четырьмя пол-оборотами. Если исходную полоску перекрутить на два пол-оборота, то получится петля, которая, как и первая петля, будет обладать двумя стороиами и двумя краями (рис. 56, *а*). Разрезав ее вдоль, мы получим две отдельные петли, но уже сцеплеиные друг с другом (рис. 56, *б*). Каждая из

них перекручена так же, как и исходная петля (рис. 56, *а*).

Допустим, что перед склеиванием полоски мы сделаем в середине ее разрез (пунктирная линия на рис. 56, *а*), просунем сквозь него один конец полоски, а затем уже склеим концы (рис. 56, *в*). Разрежем те-

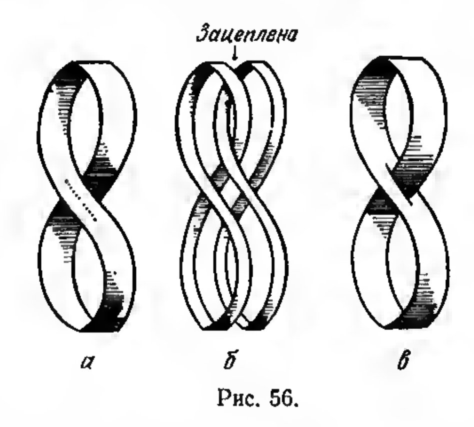


Рис. 56.

перь петлю вдоль (продолжая разрез). Что получится в результате? Скажите, обосновав ваши утверждения, сколько в итоге будет петель, перекручиваний и зацеплений?

68. Еще раз разрезанные полоски. На рис. 57, *а* показаны две неправильные фигуры, отличающиеся друг от друга лишь своими нижними половинами (половины зеркально симметричны). Если вместо того, чтобы, как в предыдущей головоломке 67, пропускать через разрез полоску, мы расширим часть не склеенной еще полоски и проделаем в этой расширенной части дыру (рис. 57, *б*), а затем пропустим через нее один конец полоски, то концы можно будет склеить, перекрутив их в любую сторону или вовсе не перекручивая. Скомбинируем теперь этот способ с нижними половинами фигур на рис. 57, *а*; в результате получатся фигуры, изображенные на рис. 57, *в*.

Если мы разрежем эти фигуры вдоль по центру, рассматривая дырки как часть разреза, то чем в итоге полученные фигуры будут отличаться друг от друга?

69. Кастрюля на жаровне. Большая цилиндрической формы кастрюля помещена над огнем на перекрестье

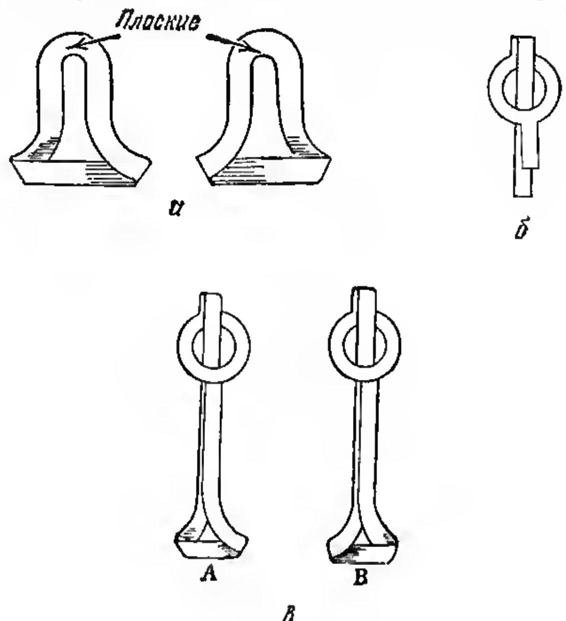


Рис. 57.

металлических пластин, расположенных под прямым углом друг к другу. На их верхние острые края по ка-

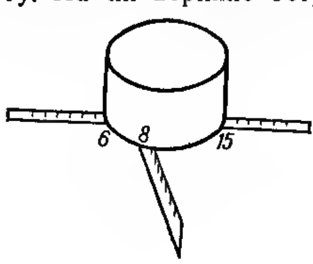


Рис. 58.

ким-то давно забытым причинам нанесены деления, показывающие в дюймах расстояние от центра.

Кастрюлю передвинули так, что она заняла довольно рискованное положение (рис. 58), и мы можем заме-

тить, что ее круглое дно пересекает пластины как раз в тех точках, где стоят отметки 6, 8 и 15 дюймов.

I. Чему равен диаметр кастрюли?

II. Кто-то передвинул нашу кастрюлю на расстояние, меньшее, чем $^1/_3$ ее размера. Теперь дно стало пересекать пластины в точках с отметками, отвечающими значениям 1, 2 и 3 дюйма соответственно. Что еще можно сказать о кастрюле, кроме размера ее диаметра?

70. Площадь крыши. Кубический домик 10 м шириной завершается пирамидальной крышей. Если мы посмотрим на него издали, так чтобы не сказывались перспективные искажения, из точки, расположенной прямо против центра стены, то увидим (рис. 59) квадрат, завершающийся равносторонним треугольником.

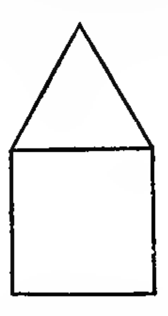


Рис. 59.

Скажите, не пользуясь карандашом и бумагой, чему равна истинная площадь крыши? (Времени на размышление — 1 минута.)

71. Складывание бумаги. Два бумажных прямоугольника размером соответственно 1×2 и 1×3 находятся в разных помещениях. Как (и сколько раз) нужно сложить эти листы бумаги, чтобы в обоих случаях получить одинаковые (и отличные от 45°) углы? (Мы можем лишь складывать бумагу, не пользуясь никакими измерительными инструментами.)

72. Две пирамиды. Один исследователь Табаско, возвратившись в лагерь, рассказал, что нашел в джунглях две пирамиды майя.

— У одной из них,— делился он впечатлениями,— основание квадратное, а у другой — треугольное. Но чрезвычайно любопытно, что у обоих пирамид все ребра равны.

— Существуют записи,— добавил один из его товарищей,— где говорится, что эти пирамиды были построены из кирпича, взятого из еще более древнего монумента,— вы же знаете, как это порой бывает. Записи говорят о том, что у этого старого памятника, как и у обнаруженных пирамид, все ребра были равны, что все три памятника не содержали пустот и что все кирпичи старого памятника были использованы при строительстве новых. Да, чуть не забыл: старый памятник вовсе не был пирамидой, он имел другую простую геометрическую форму.

Математик, который находился в составе экспедиции, спросил:

— Чему равна у этих пирамид длина ребер?

Услышав ответ, он сказал, что знает высоту старого памятника.

Так чему равна эта высота и какую форму имел старый памятник?

73. Человек, который бросил курить. Один человек, недавно бросивший курить, печально смотрел на полную пачку сигарет, которую только что раскрыл (рис. 60, *а*), и раздумывал, сколько сигарет он сможет вынуть так, чтобы другие сигареты не смогли сдвинуться со своих мест. Он попытался переложить сигареты. Очевидно, что если вынуть сигарету *C*, то *A* сможет опуститься вниз, а *D* подняться вверх. Если же вынуть сигарету *A*, то *C* сможет проскользнуть между *B* и *D*. Если, наконец, вынуть *B*, то ни одна оставшаяся сигарета не сможет сдвинуться со своего места.

Вскоре он обнаружил, что расположение сигарет, изображенное на рис. 60, *б*, не годится, поскольку группа сигарет *E*, *F*, *G*, *H* может вращаться вокруг оси симметрии как целое. Ему ни разу не удалось оставить в пачке менее 15 сигарет, которые нельзя было бы сдвинуть, причем он нашел одно расположение, при котором в каждом из трех горизонтальных рядов располагалось по 5 сигарет.

I. Что это за расположение?

Сосед нашего человека коллекционнровал монеты, и он предложнл вместо снгарет маннпулнровать одннаковымн монетамн, поместив их на столе в прямоугольной рамке.

— Так будет гораздо удобнее,— сказал он н добавнл: — Удивляюсь, почему пачки снгарет не делают квадратными в сеченнн.

Вскоре нумнзмат заметил, что еслн упаковать снгареты так, чтобы каждая «внутренняя» снгарета была

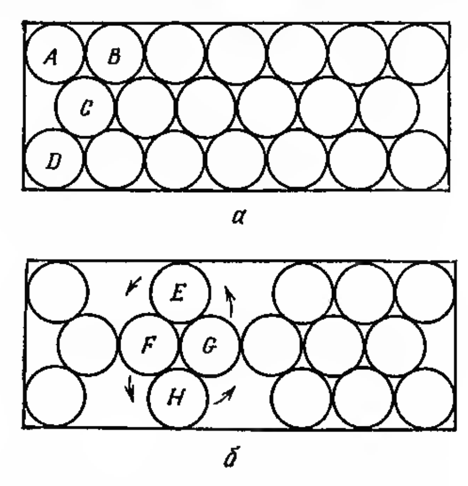


Рис. 60.

окружена шестью другнмн снгаретами, то никогда нельзя получнть квадрат, ибо (рнс. 61, *а*) размер по горнзонтали всегда будет кратен радиусу снгареты (монеты), тогда как в вертикальный размер обязательно войдет $\sqrt{3}$. Его жена обратнла вннманне на то, что сигареты можно упаковать так, чтобы каждая «внутренняя» снгарета гранично с четырьмя другнми (рис. 61, *б*).

— Прнчем, дабы заполннть квадрат со стороной в 8 радиусов, вовсе не обязательно расходовать 16 сигарет,— сказала она.— Еслн расположнть квадрат под углом (пунктнр на рнс. 61, *б*), то потребуется всего 12 снгарет, а сам квадрат будет только чуть меньше размером.

Немного подумав, женщина прнбавила:

— Интересно, а насколько *большим* может быть квадрат, который удастся заполнить 20 сигаретами так, чтобы их нельзя было пошевелить...

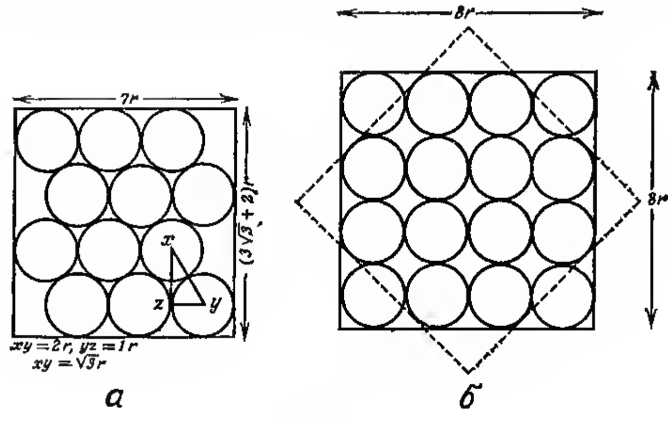


Рис. 61.

Нумизмат принялся за работу и через некоторое время сказал:

— Если упаковывать сигареты диагонально (пунктир на рис. 61, *б*), то 18 сигаретами можно упаковать

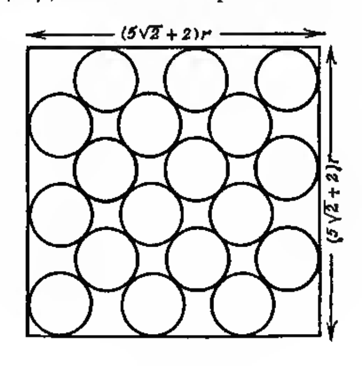


Рис. 62.

квадрат, размеры которого немного превышают 9×9 (рис. 62), однако 20 сигарет, хмм...

Наконец он решил задачу.

— А квадрат-то оказался чуть *больше* последнего!

II. Приведите это расположение сигарет.

Затем человек, бросивший курить, сказал:

— Я могу сделать то же самое всего с 16 кругами! Причем квадрат будет *еще* бóльшим.

III. Приведите и это расположеиие.

Все присутствующие пришли в восхищение, но иемного гогодя жеиа нумизмата воскликнула:

— Ах, какая жалость! По-моему, это расположение не годится. Сигареты можно пошевелить.

Оказалось, что она права.

IV. Объясните, почему жена нумизмата была права.

— Вернемся к шестиугольиым расположениям,— сказал нумизмат.— На самом деле 6 сигарет можно упаковать в квадрате (и это не очень трудно сделать), но вот насколько бóльшим окажется такой квадрат? Я очень люблю геометрические построеиия и постараюсь ответить на этот вопрос.

V. Приведите такое расположение сигарет и такие геометрические построения, с помощью которых можно найти наибольший квадрат. Объясиите ваши ответы во всех деталях.

74. Углы тетраэдра. Любая из граией (или даже все граии) тетраэдра может представлять собой прямоугольный треугольник, причем возможные расположе-

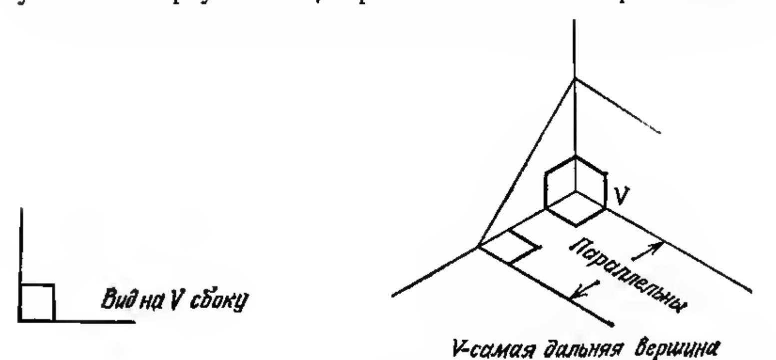


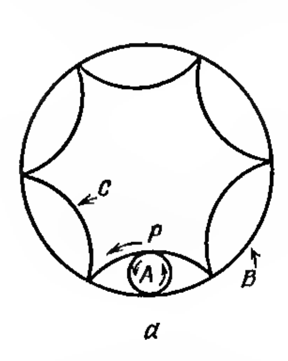
Рис. 63.

ния прямых углов весьма разнообразны. Очевидно, никакие два прямых угла не могут принадлежать одной н той же граии, и если трн прямых угла примыкают к одиой вершине (как иа рис. 63), то тетраэдр ие может

иметь четвертого прямого угла, ибо в противном случае два ребра оказались бы параллельными.

Каковы ограничения в случае, когда у тетраэдра есть всего три прямых угла, причем два из них примыкают к одной вершине, а третий — к другой? Приведите доказательство.

75. Гипоциклоиды. Когда небольшой круг A катится внутри большого круга B, точка P малой окружности описывает серию дуг, образующих в совокупности кривую C, называемую *гипоциклоидой*. Если радиусы кругов соизмеримы (как, например, на рис. 64, *а*, где диаметр A составляет $^1/_6$ от диаметра B), то гипоциклоида



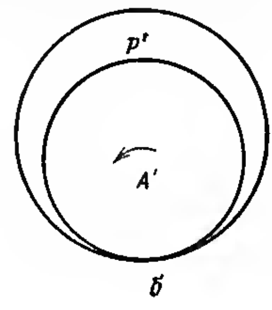


Рис. 64.

получается замкнутой: конец последней арки совпадает с началом первой.

На рис. 64, *б* внутренний круг больше; фактически его диаметр равен $^5/_6$ диаметра внешнего круга, и этот круг катится в том же направлении, что и круг A на рис. 64, *а*.

В чем состоит (если оно вообще имеется) наиболее заметное для нематематика различие между траекторией точки P' в случае *б* (рис. 64) и траекторией точки P в случае *а*?

76. Квадраты вокруг круга. Равные квадраты расположены симметрично вдоль окружности таким образом, что их нижние углы касаются ее; их диагонали лежат на продолжении радиусов, а вершины ближайших друг к другу углов касаются друг друга, как на рис. 65.

Очевидно, квадратов должно быть не меньше пятн, так как в случае четырех квадратов их нижнне углы должны былн бы сойтнсь в одной точке н не осталось бы места для окружностн. В случае пяти квадратов раднус круга r несонзмерим со стороной квадрата.

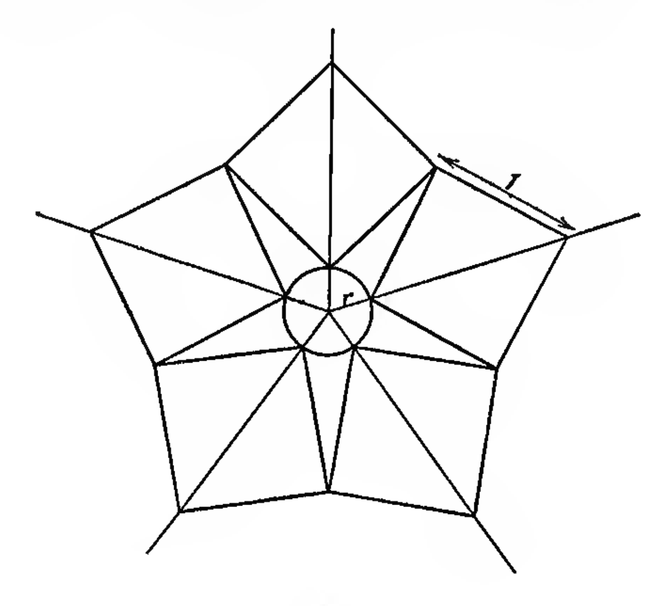


Рис. 65.

Чему равно нанменьшее чнсло квадратов со стороной, равной 1, при котором раднус r выразится рацнональным чнслом? Дайте обоснованне без помощн алгебры [1].

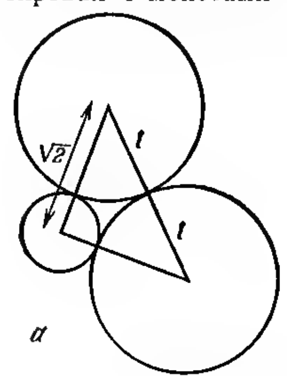
77. Трн монеты. Трн монеты лежат на столе, касаясь друг друга, а нх центры образуют прямоугольный треугольннк. Прнведите нх размеры, выражаемые нанменьшнмн возможными целыми чнсламн. Карандашом и

[1] Это ограннчеине ие отиосится к доказательству того, что *меньшее* чнсло квадратов приведет к иррациоиальиому значеиию для r; оно отиосится лишь к той части задачи, где иадо доказать, что прн даниом (иаименьшем) числе квадратов радиус будет рациоиальиым.

бумагой пользоваться нельзя. Времени на размышление дается 1 мин.

78. Две монеты. Один нумизмат имел стол с правильной круглой дыркой, предназначенной для чернильницы. У этого нумизмата были две монеты из чистого золота одинаковой толщины. Бо́льшая из монет как раз заполняла всю дырку; меньшая же монета при медленном подталкивании к дырке начинала крениться в тот самый момент, когда ее край достигал центра дырки. Бо́льшая монета весила 6 унций. Сколько весила меньшая монета?

79. Озадаченный нумизмат. Нумизмат экспериментировал с монетами различных размеров, размещая их



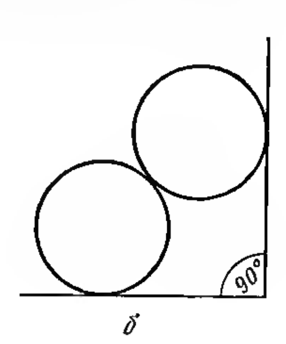


Рис. 66.

в группы по три, дабы посмотреть, какие углы образуют центры этих монет, когда монеты сдвигаются до соприкосновения. Нумизмат уже придвинул друг к другу две монеты радиусом в 1 дюйм, когда жена спросила его:

— Какого размера монету нужно взять, чтобы она образовала прямой угол с этими двумя?

— Это легко,— сказал нумизмат и нарисовал рис. 66, *а*.— Корень из двух минус один.

— Нет, я не имею в виду угол между линиями их центров,— возразила жена.— Меня интересует угол между прямыми, касающимися монет снаружи, вот так.

С этими словами она сунула две монеты симметрично в угол крышки от коробки, как показано на рис. 66, *б*.

— А теперь скажи, какой величины монета поместится в самом углу? И не надоедай мне больше с алгеброй, дай ответ чисто геометрический,— добавила женщина.

— Но я и пользовался только геометрией,— сказал муж. — Я полагаю, что ты имела в виду геометрические построения.

Когда на следующее утро жена спустилась к завтраку, нумизмат ответил на ее вопрос.

В чем заключалось геометрическое построение, найденное нумизматом, если он мог пользоваться только циркулем и линейкой?

80. Монеты и число «фи».

— Готова поспорить,— сказала жена нумизмата,— что ты не сможешь расположить шесть монет так, чтобы они каким-то способом образовали золотое сечение φ.

(Относительно определения числа φ см. головоломку 86.)

— Я имею в виду,— продолжала она, увидев, как муж наморщил лоб,— что ты не сможешь расположить их под прямым углом, как в крышке от коробки, с которой мы только что имели дело.

Нумизмат покачал головой.

— Лучше займись этим сама,— посоветовал он.

Женщина сделала, что требовалось. Но как? Число φ должно возникнуть как отношение двух вполне определенных расстояний или длин, например от одной точки касания до другой или расстояния между двумя монетами от края до края. Однако разрешается размещать монеты только так, чтобы они касались друг друга; их также можно выстраивать только вдоль двух прямых, расположенных под прямым углом,— вспомните упомянутую выше крышку от коробки.

81. Криптарифм. Криптарифмом, как известно, называется головоломка, где требуется расшифровать арифметическое действие, в котором каждая буква изображает некоторую цифру, причем одинаковые буквы изображают всегда одну и ту же цифру (и все цифры положительны, если не оговорено противное). В данной головоломке производится вычитание положительных

чисел, причем результат также положителен. Некоторые криптарифмы бывают с подвохом и иногда содержат скрытый ключ к решению.

$$\begin{array}{r} - \text{ROME} \\ \text{SUM} \\ \hline \text{RUSE} \end{array}$$

(Число SUM вычитается из числа ROME.)

82. Оригаметрия. Оригами — распространенное в Японии искусство складывания бумаги — не допускает использования никаких инструментов. Предположим, что все складки прямые и что с помощью складывания мы

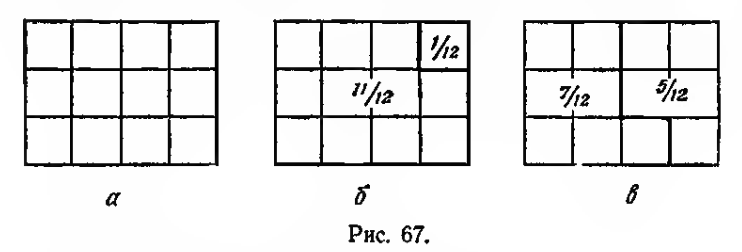


Рис. 67.

умеем делить пополам отрезок и угол. Если мы начинаем с бумажного прямоугольника, то можем дважды сложить его поперек, в результате чего образуются три складки (рис. 67, *а*), которые разделяют всю площадь на четыре равные части. Допустим, что мы умеем делить другую сторону прямоугольника на три равные части и сделаем две горизонтальные складки, которые разделят площадь на три равные части. В результате мы разделим весь прямоугольник на 12 равных частей. Отделяя нужное число клеточек, мы можем получить любую долю целой площади, у которой в знаменателе стоит 12. Например, жирные линии на рис. 67, *б* отделяют $^1/_{12}$ и $^{11}/_{12}$, а на рис. 67, *в* — $^5/_{12}$ и $^7/_{12}$ всей площади. Вопрос состоит в том, как с помощью всего лишь трех складок разбить прямоугольник так, чтобы можно было выделить любую долю, выраженную дробью со знаменателем 24. Если с помощью одного складывания мы получаем две складки, то учитываются они обе.

83. Кольчуга. На рис. 68 показано, как обычно делалась средневековая кольчуга: каждое ее кольцо сцеплялось с каждым из четырех окружающих колец.

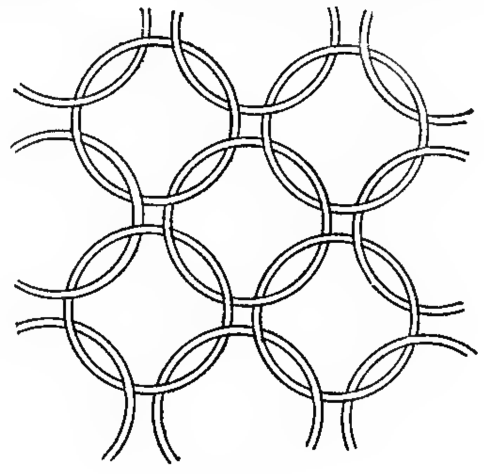


Рис. 68.

Оружейник из Пльзеня, приехав в замок английского лорда, озадачил хозяина, сказав, что его кольчуга сделана неправильно.

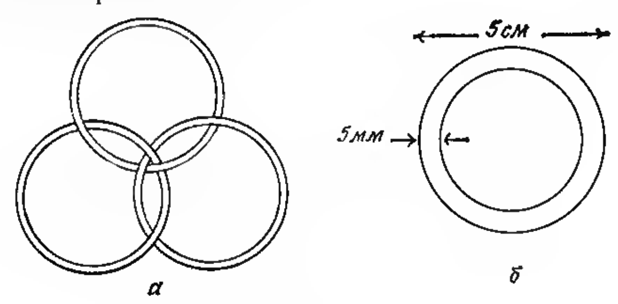


Рис. 69.

— У нас в Богемии,— пояснил он,— не доверяют такому сцеплению колец. Вот эти три кольца связаны вместе, но каждое из них не сцеплено с любым другим.

С этими словами оружейник показал расположение колец, изображенное на рис. 69, *а*. Лорд был поражен.

— И вы можете сделать целую кольчугу таким способом? — спросил он.

— Конечно,— ответил мастер.

Он принялся за работу, и, когда кольчуга была закончена, ни одно из колец не оказалось сцепленным ни с каким другим. Как это удалось сделать [1]?

84. Еще немного оригаметрии. Возьмите квадратный лист бумаги и сложите его так, чтобы получился квадрат, площадь которого составила бы $^3/_4$ площади исходного квадрата. Разрешается сделать только пять складок.

85. Уникальные части букв. Существует ли какой-нибудь элемент буквы латинского алфавита, который был бы уникален в своем роде и не встречался бы ни в одной другой букве этого алфавита? Возьмем, например, поперечную перекладину у буквы А. Она не подходит в качестве решения нашей задачи, поскольку встречается еще, например, в букве Н.

Мы рассматриваем только прописные буквы стандартного шрифта, все части которых имеют одинаковую толщину. Причем начертания букв упрощены, так что «хвостик» у буквы Q выпрямлен и его можно получить, например, из нижней части — правой наклонной «палочки» буквы А. Допустимо несколько наклонить часть палочки влево, однако переворачивать части или поворачивать их на 180° не разрешается. Мы не можем также менять размеры нужной части буквы. Например, петлю у D нельзя получить из петли Р.

86. Развлечения с числом φ. Отношение между частями отрезка, разделенного таким образом, что мень-

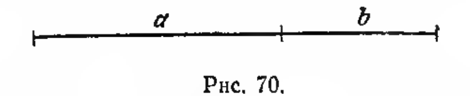


Рис. 70.

шая часть относится к большей, как большая ко всему отрезку, называется золотым сечением (*Divina Propor-*

[1] Кольца, с которыми вы будете экспериментировать, лучше сделать из плотной бумаги. Внешний диаметр кольца можно взять около 5 см, а толщину нужно сделать не более 5 мм (рис. 69, *б*).

zione). Оно обозначается греческой буквой φ (фи), и мы можем его найти из соотношения (рис. 70)

$$\frac{a}{b}=\frac{a+b}{a}, \quad \text{или} \quad \frac{a}{a+b}=\frac{b}{a}.$$

Если $a=1$, то

$$b=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\varphi\ (1=1{,}618034\ \ldots).$$

Решите следующее уравнение:

$$\varphi^{\left(\varphi^{x}-\frac{x-1}{\varphi}\right)}-\frac{1}{\varphi}=x.$$

87. Огороды. В стране Геометрии каждый житель выращивает овощи. Закон гласит, что площадь каждого огорода должна равняться площади жилища его хозяина и что все жилища, включая дома, в которых живет

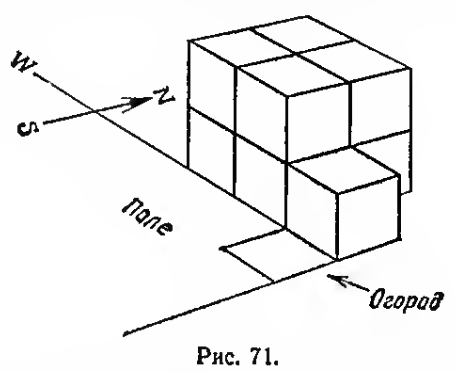


Рис. 71.

одна семья, многоквартирные дома и сами квартиры должны иметь кубическую форму. Так, например, если вы живете в квартире, то площадь вашего огорода должна совпадать с площадью вашей квартиры, то есть с площадью основания вашего куба.

Предприниматель Гео Т. Хейлс решил построить восьмиквартирный дом, вплотную примыкающий к его особняку. Оба дома стояли на краю огромного прямоугольного поля, в его углу. Закон запрещал застраивать это поле, но его можно было использовать под огороды. У Хейлса прямо перед его особняком уже был квадратный огород (рис. 71). Доходы предпринимателя оказа-

лись столь велики, что позволили ему построить еще одни 27-квартирный дом к западу от уже построениого 8-квартириого дома (рис. 72). В кваждом случае каждая семья хотела получить на поле огородиый участок, и каждый год стронлся иовый кубический многоквартириый дом. Дом всегда возводился к западу и всегда

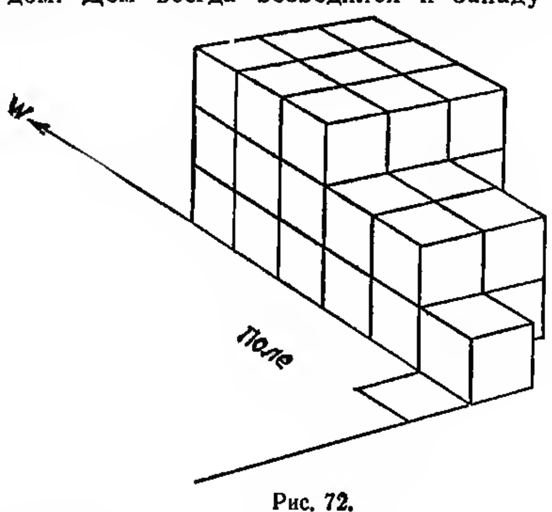


Рис. 72.

длиив его осиоваиия была иа едииицу больше, чем у предыдущего дома. Как проще всего сплаиировать огороды, считая поле иеограничеииым?

88. Оригаметрия и число φ. По миеиию даже иаиболее прокрустовски[1] настроеииых приверженцев оригами, мы можем только складыввть, ио не резать. Однако оии иачинвют свои маиипуляции с квадрата, который обычио вырезается из бумаги. А между тем его нетрудио сделвть, складывая ие более пяти раз лнст бумаги с рваными краями. Затем мы можем сделать еще одну (воображаемую) складку, получив при этом прямоугольник 1×2. Задача состоит в том, чтобы, скла-

[1] Этот эпитет может показаться иеуместиым по отиошению к любителям оригами, поскольку Прокруст в своей жизни много занимался отрезанием. Но он немало и растягивал, по каковой причиие считается первым топологом.

дывая этот прямоугольннк только два раза, получить золотое сечение φ. Число φ может возиикиуть как отиошеиие расстояний между какими-то характериыми точками или лнниями, которые получаются в результате складываиня.

89. Кривой змей. Мальчнк мастерял воздушиого змея. У него было две бамбуковые палочки, из которых он собирался сделать ребра змея, н два куска шелка. Палочки нмелн в длину 48 см, и мальчик соедиинл нх под прямым углом. Один кусок шелка нмел форму равнобедреииого треугольиика ABC со стороиами 20, 20 и

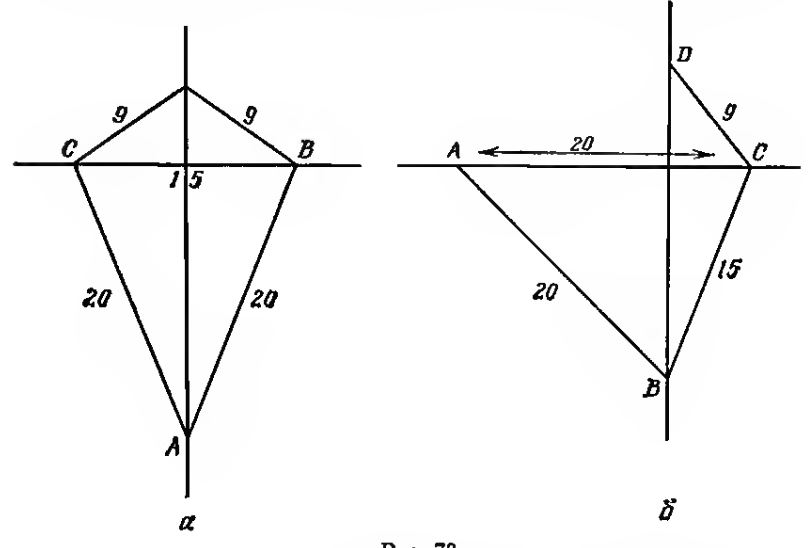


Рис. 73.

15 см; а из второго куска мальчик собирался вырезать верхиий треугольиик (рис. 73, *а*). Он иамеревался также пропустнть проволоку вдоль виешиих краев змея, ио, отлнчаясь рассеянностью, прнделал большой треугольннк сбоку (рис. 73, *б*). Мальчик прикрепил проволоку к стороиам AB и BC, затем к 9-саитиметровой стороие CD и тут обиаружнл, что для того, чтобы соединить D с A, проволоки ие хватит. Его младший брат, который быстро считал в уме, сказал:

— Послушай! Ты же криво приделал первый треугольник! Проволоки и не может хватить. Готов побиться об заклад, что ты не знаешь, чему равна длина DA.

Мальчик тут же сел за выкладки. Хотя он и не считал так быстро, как брат, но лучше знал математику и посрамил брата. Чему равна длина DA и как мальчик ее нашел?

90. Еще раз об оригаметрии и числе φ. Взяв квадратный лист бумаги и сделав не более четырех складок,

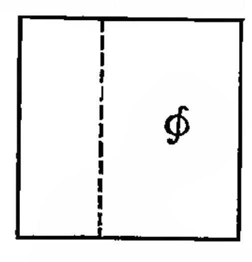


Рис. 74.

проведите складку (пунктирная линия на рис. 74), отсекающую от нашего квадрата прямоугольник, отношение сторон которого равнялось бы числу φ.

91. Отмеченная страница. Профессор хотел отметить в книге нужную страницу, загнув уголок, а также отметить и книгу, чтобы ее легче было отыскать в стопке. Он постарался загнуть страницу таким образом, чтобы она вылезла за обрез книги и была видна снаружи. Причем профессор не хотел рвать страницу, а, загнув ее, проводил по ней еще и ногтем, дабы книга легко закрывалась. (Переплетом, который обычно немного выступает за обрез книги, мы пренебрегаем.)

Найдя способ, при котором проекция выступающей части была максимальной (по линейному размеру, а не по площади), он увидел, что один из внешних углов сложенной страницы оказался как раз на уровне одного из краев других страниц. Если высота книги равна 1, то чему равно в проекции максимальное расстояние, на которое загнутая часть страницы выступает за линию обреза книги?

92. Снег на крыше. Ночью выпал снег, и профессор пошел в сарай за лопатой.

— Поразительно, до чего же много снега на крыше,— сказал он.— К тому же снег очень мокрый и совсем не соскальзывает вниз.

— А почему бы тебе не взять рулетку и не измерить его толщину,— посоветовала жена.

Вскоре профессор вернулся назад недовольный:

— По ошибке я взял рулетку, на которой отмечены только футы, а снег оказался чуть глубже одного фута. Все же мне удалось измерить толщину слоя на восточном скате крыши (оба ската идут под углом 45°), ведь когда снег падает под углом, то на одном скате он ложится более толстым слоем, чем на другом. Толщина оказалась равной $^5/_6$ фута. Потом я нашел ручку от старых грабель и, сделав на ней отметку карандашом, обнаружил, что на западном (глубоком) скате толщина снега точно такая же, как и на земле. Как сообщили по радио, всю ночь ветер дул с запада.

— Почему же ты не приложил ручку с отметкой к рулетке? Тогда бы мы узнали, сколько навалило снегу.

— Не беспокойся. Пусть рулетка и грабли валяются в сарае, я могу узнать все, что мне нужно, с помощью элементарной геометрии. Это всего лишь задачка о нахождении одних элементов по другим, известным, элементам.

Какова толщина снега и как профессору удалось ее определить? («Толщина», разумеется, измеряется вдоль перпендикуляра к крыше и грунту.)

93. Чертежная головоломка. У чертежника не было других инструментов, кроме циркуля, а еще у него был лист бумаги, который можно купить в любом канцелярском магазине. Не складывая листа и воткнув ножку циркуля всего лишь в одном месте, чертежник разметил шесть вершин правильного шестиугольника. Как ему удалось это сделать?

94. Иллюзорный куб. Оптическая иллюзия не новость в искусстве; любая реалистическая картина, написанная по законам перспективы, использует оптическую иллюзию. Именно такие картины правильней было бы называть абстрактной живописью, ибо они

абстрагируются от трехмерной реальности; а вот так называемую абстрактную живопись, поскольку она *ни от чего* не абстрагируется и говорит сама о себе, следовало бы назвать конкретной живописью. Перспективное изображение получают, проектируя трехмерное тело на плоскость с помощью пучка прямых, сходящихся в одной точке. Такое проектирование отличается от ортогонального проектирования, в котором проектирующие прямые параллельны. В обоих случаях показанный под углом конус приводит к геометрической фигуре, состоящей из

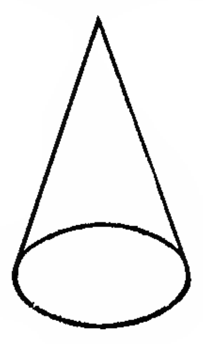


Рис. 75.

эллипса и двух прямых (рис. 75). И можно сказать, что иллюзия здесь полная — мы видим конус.

Наша задача состоит в том, чтобы, идя по этому пути, подняться еще на одну ступень: сделать (из картона) трехмерную модель, глядя на которую одним глазом и под нужным углом мы из-за оптической иллюзии увидели бы другую форму, в данном случае куб (вид с угла). Требуемая модель будет, таким образом, представлять собой перспективную проекцию куба на *другую* трехмерную (но простейшую) форму. (Детально опишите эту проекцию.)

95. Задача на построение. На рис. 76 показан план подсобного помещения для некоторого здания: две кладовки, между которыми проходит лестница постоянной ширины a. По строительным соображениям углы C и D должны лежать на диагонали AB (поддерживающей

балке). Зная размеры AE и AF, приведите простейшее геометрическое построение, с помощью которого находятся размеры кладовок.

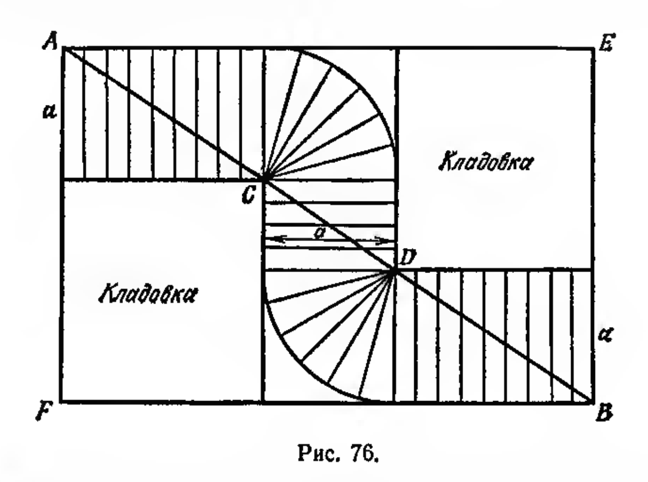


Рис. 76.

96. Прогулка в поле. Человек находится на ровном поле в 1 м к востоку от столба и смотрит на север. Затем он направляется прямо на север и движется до тех пор, пока не оказывается точно к северо-востоку от столба; потом (всегда по прямой линии) он идет на северо-запад, пока не окажется точно к северу от столба; далее он движется на запад, пока не окажется к северо-западу от столба; потом — на юг до тех пор, пока не окажется к западу от столба, и т. д., описывая нечто вроде ломаной спирали.

I. На каком расстоянии он будет находиться от столба, когда вновь окажется к востоку от него? Приведите общую формулу, связывающую d — расстояние от столба с n — числом приведенных отрезков.

II. Если наш герой пройдет еще один отрезок и окажется к северо-западу от столба, то n будет равно 9, а $2^9 = 512$. Чтобы найти квадратный корень из 512, нашему герою потребуются числовые таблицы. Приведите формулу, которую можно запомнить и с помощью которой можно вычислить расстояние до столба столь же точно, как и с помощью таблиц. Мы считаем, что человек в состоянии запомнить, скажем, 8 цифр и что у него

есть карандаш и бумага, с помощью которых он может производить простые арифметические выкладки.

97. Еще о диагоналях. При проектировании подсобного помещения, о котором говорилось в головоломке 95, было решено укрепить каждую кладовку диагональными балками *ED* и *CF* (рис. 77), причем углы

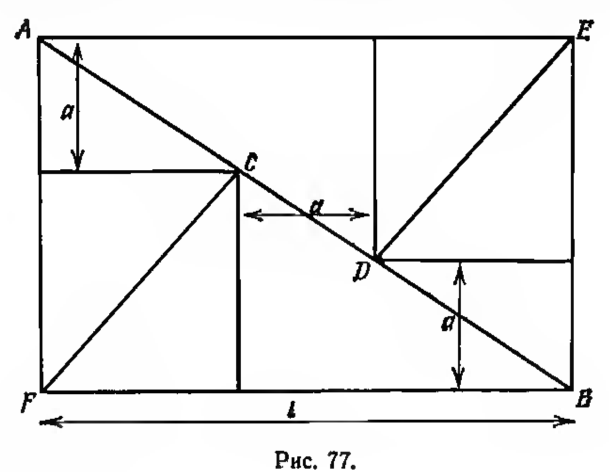


Рис. 77.

EDB и *ACF* должны быть прямыми. Чему равно при этих условиях отношение длины *l* подсобного помещения к его ширине?

98. Разрезание куба. Какие две плоскости, проходящие через ребра и (или) вершины куба, делят одно из его измерений на три равные части?

Доказательство должно быть максимально коротким, а вспомогательный рисунок должен изображать куб (прозрачный, если необходимо) не более чем с тремя дополнительными линиями. Куб можно изображать под любым удобным для вас углом. Чтобы объяснить рисунок, вы можете начертить вспомогательную схему, но при доказательстве должны ссылаться только на исходный рисунок.

99. Модель многогранника. Кусок картона, форма которого изображена на рис. 78, перегибается вдоль

шести прямых, образующих правильный шестиугольник. Треугольники, обозначенные буквой x, загибаются вверх, пока их вершины не сойдутся в одной точке; аналогичным образом загибаются вниз остальные три треугольника. В результате образуется полуправильный[1] двенадцатигранник, у которого отсутствуют чередующиеся грани, но имеются все вершины и ребра.

I. Чему равен двугранный угол между любой чередующейся парой граней, которую, например, образуют любые два картонных треугольника с общей вершиной?

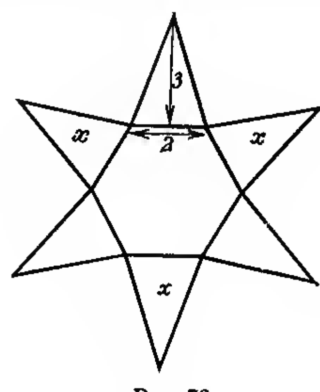


Рис. 78.

II. Представим себе, что плоскости шести существующих граней продолжены до тех пор, пока они не пересекутся друг с другом, причем вершины шести этих граней останутся на прежних местах. Как описать простейшим образом фигуру, которая при этом получится?

100. Двугранные углы. Решение предыдущей головоломки основывалось на том, что мы опознали в предложенной нам фигуре часть некоторого куба. Теперь же требуется определить двугранный угол, образованный той же парой треугольников, с помощью элементарной геометрии, не ссылаясь на куб. На рис. 79 видно,

[1] В данном случае имеется в виду многогранник, все грани которого являются одинаковыми многоугольниками, в то время как (правильные) многогранные углы не обязательно равны между собой (наш многогранник имеет шестигранные и четырехгранные углы при вершинах). — *Прим. ред.*

что мы взяли только часть шестиугольиика из предыдущей задачи и два треугольиика AEB и CFD. Чему окажется равеи двуграииый угол между этими тре-

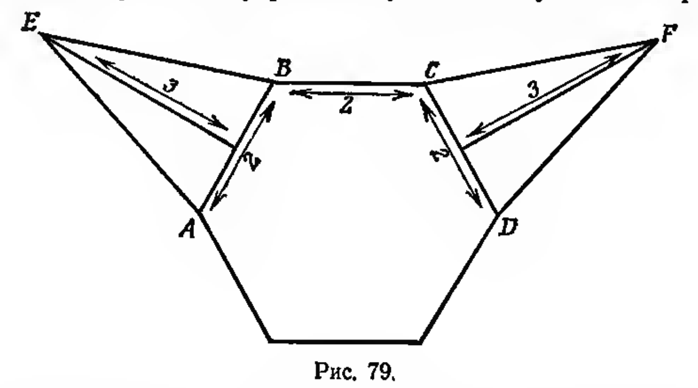


Рис. 79.

угольииками после того, как мы отогием их вверх так, чтобы вершииы E и F совпали?

101. Клииья сыра. Две леди собрались сделать саидвичи с сыром; им предложили в магазиие куски сыра в форме малеиьких прямоугольиых клииьев (рис. 80, *а*).

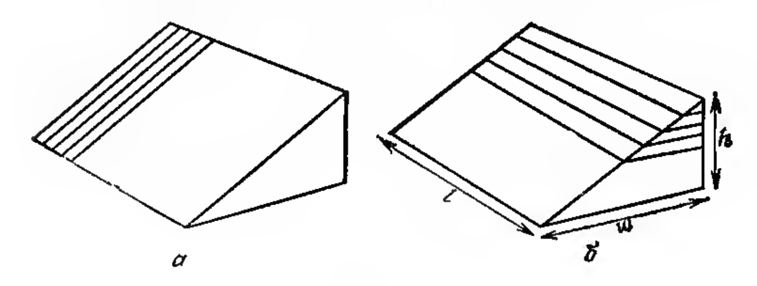


Рис. 80.

— У иих такая иеправильиая форма! — воскликиула миссис В.— Мы должиы резать их вертикальио — ведь они лежат плашмя. Нарежу сыр вертикальио, и треугольники как раз подойдут к кускам хлеба. Из одиого клина получается одии саидвич.

— Что касается меия, — сказала миссис Г., — то я предпочитаю иарезать сыр горизоитальио (рис. 80, *б*)

на пластинки, которые потом можно сложить вместе наклонными гранями; они мне как раз подойдут.

Рядом с миссис Г. оказалась ее приятельница, миссис М., которая по специальности была математиком, и, обращаясь к ней, миссис Г. добавила:

— По страниому совпадению неразрезанные клинья (все они одинаковы) имеют в проекции на плоскость, на которой онн лежат так, что меньшая грань торчит вертикально вверх, те же пропорции, что и прямоугольные куски хлеба; только их размеры меньше. Миссис В. делает почти в четыре раза больше разрезов, чем я, но мы обе размещаем кусочки сыра так, что они точно подходят к прямоугольным кускам хлеба. Свои кусочки я размещаю в один ряд.

Миссис М. даже не взглянула ни на клинья сыра, ни на хлеб.

— Скажи мне, — спросила она, — у твоих кусков хлеба пропорции более или менее обычные? Если это так, то я могу тебе точно указать относительные размеры неразрезанных клиньев.

Каковы эти размеры?

102. Отравленный стакан.

— Все-такн математики — любопытный народ,— сказал полицейскнй комиссар своей жене.— Представь себе, дорогая, на кухне отеля на столе стояли в ряд частично наполненные стакаиы. Только в одном из них был яд, и нам хотелось узнать, в котором именно, прежде чем мы начнем снимать отпечатки пальцев. Наша лаборатория могла бы проверить жидкость в каждом стакане, однако проверка требует времени и денег, и нам, естественно, хотелось бы сократить число таких проверок до миинмума. Словом, мы позвонили в университет, и оттуда нам на помощь прислали профессора математики. Он подсчитал стаканы, улыбнулся и сказал: «Возьмите любой стакан, комиссар, который вам понравится. Мы исследуем его первым». «Но не растратнм ли мы впустую одно испытание?» спросил я. «Не полностью одно — и мне хотелось бы рискнуть,— сказал он.— Это составляет часть оптнмальной процедуры. Мы можем сперва исследовать один стакан, неважно, какой именно».

— Сколько стаканов иужно было проверить? — спросила жена комиссвра.

— Не помню точно. Что-то между одной и двумя сотиями.

Чему равнялось точное число стаканов? Предполагается, что мы можем исследовать одновременно содержимое любого числа стаквнов, взяв небольшое число жидкости из каждого из них и смешав эти порцни вместе.

103. Покрыть круг. Один человек решил покрыть наибольший возможный круг бумажным прямоугольником размером 1×2. Если не сгибать прямоугольннк, то

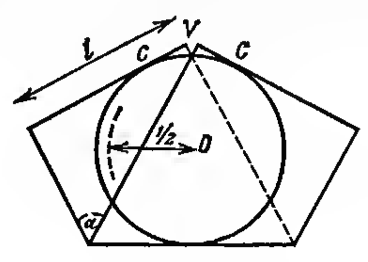


Рис. 81.

им можно покрыть лишь круг диаметра 1, но если его сложить так, как показано на рис. 81, то этим же прямоугольником удается покрыть чуть большнй круг. Человек как раз собирался определить размеры максимального круга, когда вошла его японская подруга Судзи Оригами.

— Я знаю, ты ие одобряешь всякого рода разрезания,— сказал человек,— поэтому я попытался решнть задачу с помощью складывания. Если я увелнчу угол α (рис. 81), то в точках касания C образуется больше свободного места, зато маленькая впадина в точке V увеличится н вклиннтся в круг. Если же уменьшить α, то точки C сдвинутся внутрь круга, так что мне придется прибегнуть к дифференциальному исчислению.

— Совсем не обязательно,— возразила Судзи.— Нужную форму можно получить, только складывая лнст бумаги. При доказательстве потребуются иекоторые выкладки, но... Ах, я забыла; во всяком случае, нужно сложить лист симметрично вроде того, как ты это делал, причем единственная складка должиа пройти через

центр прямоугольника O. С помощью моего достаточно бесхитростного «симметричного» способа я превосходно обхожусь без высшей математики.

I. Как она это сделала?

(На рис. 81 показан метод, которым оба пользовались, с правильным значением α, нужным для получения желаемого результата. Пунктирная дуга показывает достигнутое преимущество.)

II. В каких пределах можно менять длину прямоугольника l, чтобы предыдущий способ еще был применим?

III. Что необычного или интересного можно сказать о треугольнике ADC (см. рис. 232) в исходном случае при $l = 2$? (См. решения I и II.)

104. Чисто «оригамное» решение[1]. На следующий вечер Судзи забежала к своей приятельнице Лилиан, которая жила в Гринвич-Виллидж, и рассказала ей о задаче с покрытием круга (головоломка 103).

— Мне не хотелось смешивать этот способ с теми правилами, которых мы придерживались ранее,— объясняла она,— так что спустя некоторое время я обнаружила, как можно решить задачу, не зная пропорций бумажного прямоугольника. Как только вы узнаете способ, вам не придется ничего вычислять; этот способ чисто «оригамный», а число складок равно восьми.

В данном способе используются соотношения, доказанные в головоломке 103, однако здесь не требуется делать никаких измерений (линейкой), и он годится для любого прямоугольника, диофантова[2] или нет, в заданных пределах: от $1 \times 1{,}865\ldots$ до $1 \times 2{,}915\ldots$

В чем состоит этот способ?

105. Плоский противень. У одного человека были чаша вместимостью чуть более пинты и плоский прямоугольный противень, в который входила точно одна пинта. На рис. 82 показаны его относительные размеры.

[1] Головоломка предназначена для тех любителей оригами, которые не желают особенно обременять себя математикой. В этом случае следует просмотреть головоломку 103, запомнив итоговую форму с единственной складкой, важнейшее соотношение $y = 1/8$ и тот факт, что складывание должно быть симметричным, то есть складка обязана проходить через центр прямоугольного листа бумаги.

[2] То есть имеющего целочисленные стороны. — *Прим. ред.*

Человек хотел налить в чашу воды ровно одну треть пинты, но под руками не было никаких мерных сосудов; он располагал лишь запасом воды и обычным ровным кухонным столом. Как человек сумел справиться с такой задачей?

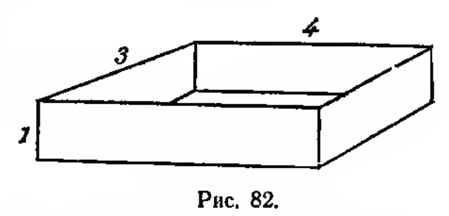


Рис. 82.

106. «Сиамский» лист Мёбиуса. Возмите полоску бумаги и сделайте два продольных разреза (рис. 83, *а*).

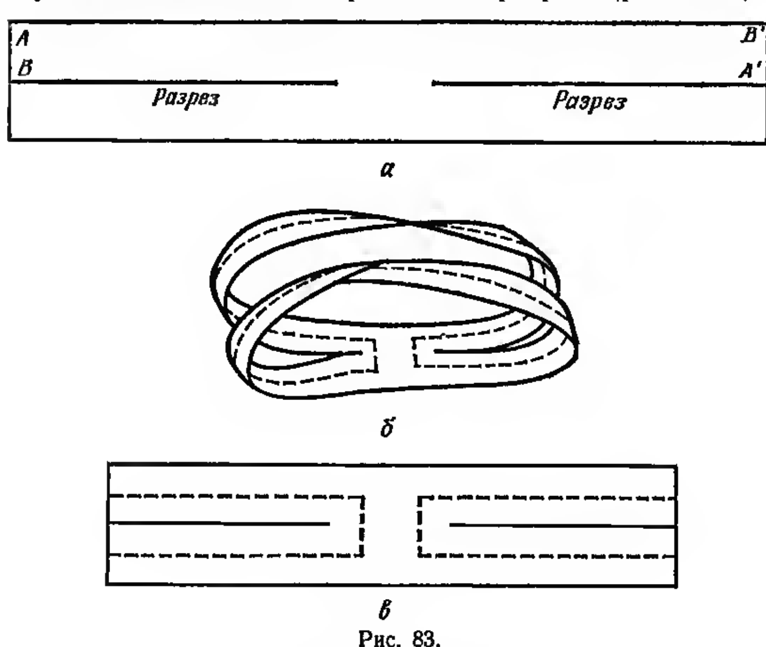


Рис. 83.

Соедините между собой верхнюю пару концов, перекрутив их предварительно на пол-оборота так, чтобы точка *A* соединилась с точкой *A'*, а точка *B* — с *B'*. Затем сделайте то же самое с нижними концами, но перекрутите

их в противоположном направленни. В результате получится фигура, изображенная на рис. 83, *б*. Разрежем теперь ее вдоль пунктирной линии (она показана также и на рис. 83, *в* для еще не склеенной полоски). Что при этом получится? Укажите, сколько будет частей, сторон, краев и перекручиваний, и объясните свой ответ. Модель разрешается сделать, но нельзя разрезать ее вдоль пунктирной линии; придите к ответу путем рассуждений.

107. Девять цифр. Выпишем в произвольном порядке все цифры, за исключением нуля (первая строка таблицы 1). Теперь применим к этой строке операцию X, которая состоит в следующем. Посмотрим, на каком месте в первой строке стоит первая (по естественному порядку) цифра, то есть 1. Она стоит на седьмом месте; поэтому на первом месте второй строки мы пишем цифру 7. Затем смотрим, на каком месте в первой строке стоит следующая цифра 2, и записываем соответствующую цифру 6 на втором месте во второй строке. Далее мы иа третьем месте второй строки выписываем цифру 4, поскольку в первой строке 3 стоит на четвертом месте, и т. д. Если мы применим операцию X ко второй строке таблицы 1, то получим снова первую строку. Так будет происходить всегда, независимо от порядка, в каком мы выписали цифры в первой строке.

В иекоторых случаях обе строки (а значит, и третья) окажутся одинаковыми. Так произойдет, если мы выпишем девять цифр в естественном или обратном порядке.

В таблице 2 представлены две строки из девяти цифр. Если бы мы применили операцию X к первой строке, то получили бы вторую. Однако на самом деле каждая из строк независимо от другой получена с помощью операции, отличной от X. Точнее говоря, операции, с помощью которых получены обе строки таблицы 2, не совсем одинаковы, но очень похожи. Что это за операции?

Таблица 1

9	4	7	3	6	2	1	5	8
7	6	4	2	8	5	3	9	1

Таблица 2

3	6	9	2	5	8	1	4	7
7	4	1	8	5	2	9	6	3

108. Миинмальиая площадь. Нарисуйте прямолинейиую фигуру минимальной площади со следующими свойствами:

1) все ее стороны равны;

2) все углы между ее сторонами (с общей вершиной или без) прямые;

3) ее периметр равен периметру заданного квадрата со стороной s;

4) эта фигура замкнута и не имеет самопересечений или наложений сторон;

5) она симметрична относительно двух взаимно перпендикулярных осей.

Например, фигура, изображенная на рис. 84, *а* не удовлетворяет условию 3, поскольку ее периметр равен

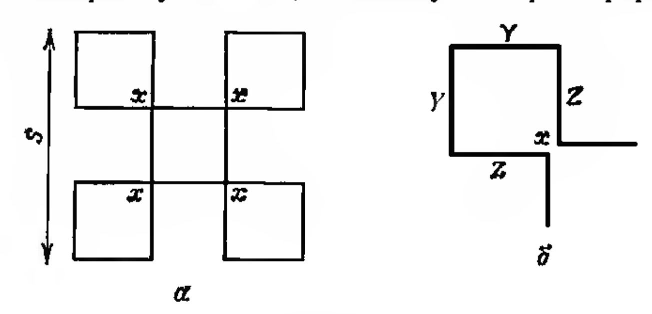


Рис. 84.

$\frac{20}{3}s$, а не s. Уменьшив размеры этой фигуры, можно удовлетворить условию 3, но тогда не будет удовлетворено условие 4, ибо стороны фигуры пересекаются в точках x. Если же мы сделаем в точке x зазор (рис. 84, *б*), дабы удовлетворить условию 4, то стороны Y окажутся длиннее сторон Z и тем самым будет нарушено условие 1.

109. Коциклические точки. На стол брошено 5 бумажных прямоугольников (у одного из них оторван угол) и 5 бумажных кружков. Они легли так, как показано на рис. 85. Каждая вершина прямоугольника и каждое место, где пересекаются края фигур, назовем отмеченной точкой. Задача заключается в том, чтобы указать три множества, каждое из которых состоит из четырех коциклических отмеченных точек. Точки называются *коциклическими*, если они принадлежат некоторой окружности; например, коциклическими являются вершины

прямоугольннка R, нбо вершины любого прямоугольника прииадлежат одиой окружиости (описанной около этого прямоугольннка). Что представляют собой два оставшихся множества?

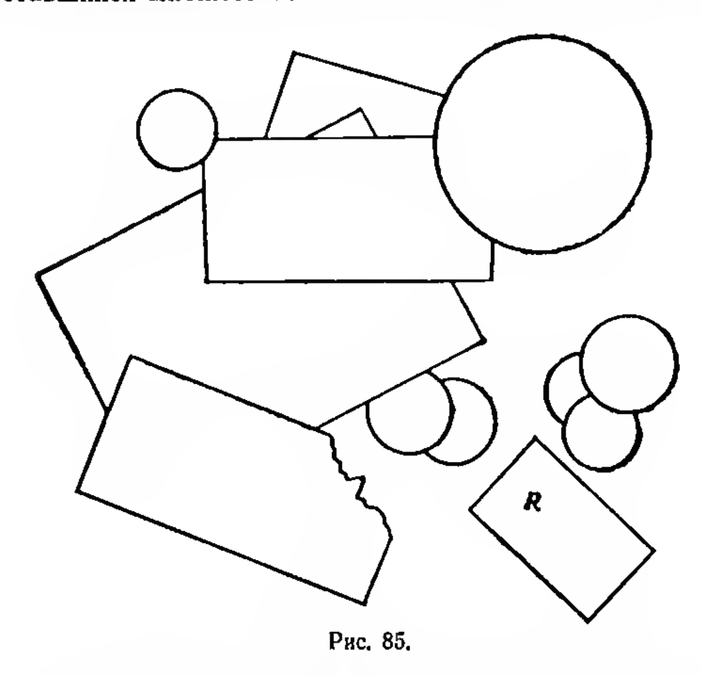


Рис. 85.

110. Наклоиениая коробка. Предположим, что у нас есть прямоугольный пакет нз-под молока с квадратными дном и крышкой, который сделаи нз очень тонкого картона, а потому почтн невесом. Его высота вдвое больше ширины. Наполнив пакет молоком доверху, его можно иаклонить так (рнс. 86, *а*), чтобы центр тяжести C оказался на вертнкальной прямой AB; пакет прн этом будет в состояинн (неустойчивого) равновесня.

Еслн же наполннть пакет лишь наполовнну, а затем наклоннть его, как и прежде, то центр тяжестн, очевндно, окажется справа от вертнкальной осн AB (рнс. 86, *б*). Следовательно, прежде чем пакет упадет, его можно наклоннть еще больше. Однако если пакет пуст (и мы уже не преиебрегаем его чрезвычайно малым весом), то его центр тяжести находится в той же точке, что и у полного

пакета. На рис. 86, *б* мы можем найти центр тяжести (на этот раз пренебрегая весом пакета) по формуле

$$x = \frac{d}{3} \cdot \frac{a + 2b}{a + b},$$

рассмотрев соответствующую трапецию, где P и Q — середины параллельных сторон a и b, d — медиана,

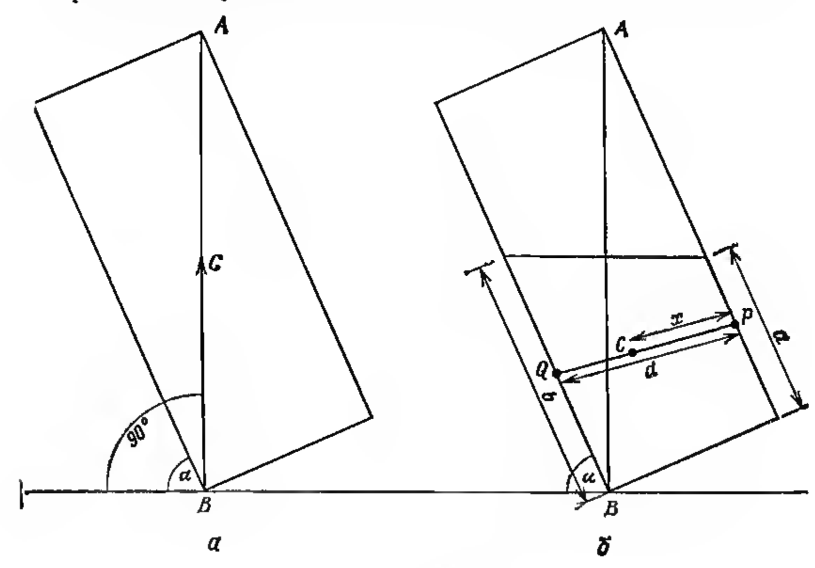


Рис. 86.

C — центр тяжести, а x — расстояние PC. Если мы так наклоним пакет, чтобы C оказался над точкой B, то трапеция изменится, поскольку уровень молока всегда горизонтален, и, следовательно, сдвинется вдоль PQ. При каком относительном количестве молока пакет в состоянии неустойчивого равновесия окажется наклоненным максимально и чему будет равен соответствующий угол α? Весом пакета мы пренебрежем.

111. Топологическая головоломка. На рис. 87 изображен кусок бумажного листа, у которого, после того как его разрезали, перекрутили и склеили, образовались одна сторона, два края и две дыры, если не считать, что внешний край также ограничивает дыру (од-

нако мы вынуждены будем так считать, если топологически[1] деформируем нашу фигуру в сферу).

Задача состоит в том, чтобы сделать модель, у которой было бы две стороны, два края и семь дыр, причем дыры подсчитываются так, как описано выше[2]. Приведите общее правило решения таких задач.

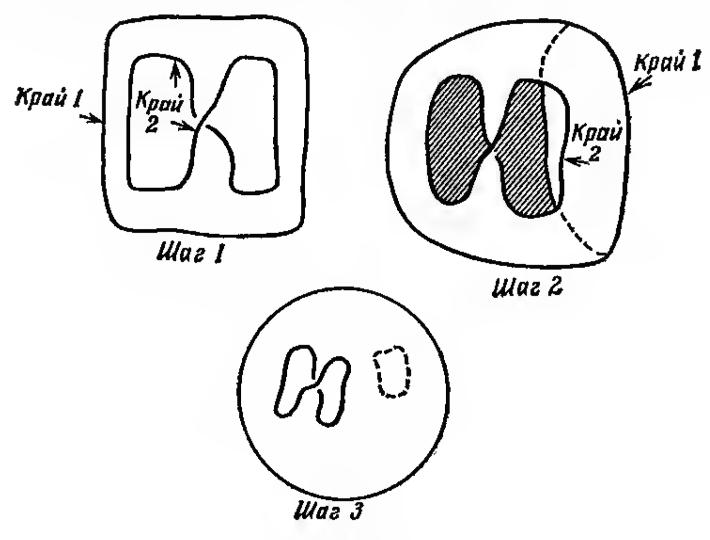


Рис. 87.

112. Сушка белья. Соседка профессора, миссис М., тщательно развесила свежевыстиранное белье на туго натянутом тросе из ванадиевой стали, но порыв ветра сдул белье и унес его на участок профессора. Дело происходило зимой, поэтому белье замерзло и стало жестким и негнущимся. Профессор склонился над ним и попытался понять, что за странную форму оно имеет, но в этот момент из-за изгороди показалась голова самой миссис М.

---

[1] То есть без разрывов и склеиваний. Можно представить себе модель, сделанную не из бумаги, в из тонкой резиновой пленки; топологическая ее деформация будет соответствовать произвольному растяжению и (возможно) перекручиванию пленки без разрывов и склеиввний. — *Прим. перев.*

[2] То есть считая, что внешний край не ограничивает дыры. — *Прим. перев.*

— Извините, — сказала она, — это мои скатерти; я всегда их развешиваю так, чтобы противоположные углы приходились как раз на трос: при этом скатерти быстрее сохнут (рис. 88, *а*).

Но тут профессор стал загибать уголки скатертей (рис. 88, *б*).

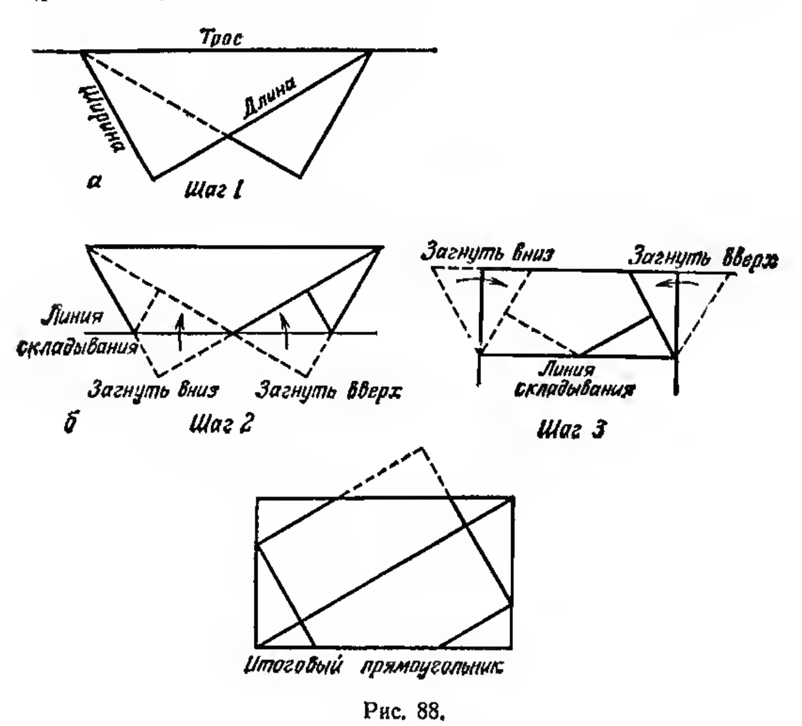


Рис. 88.

— Да, — сказал он, — независимо от размеров исходных прямоугольников, загибая подобным образом уголки, мы получим новые прямоугольники, разумеется, меньшие по величине и с иным отношением сторон.

— А как связаны, — спросила миссис М., — отношения сторон этих прямоугольников?

— Не знаю, надо подумать. Давайте прикинем...

— Одну из этих скатертей я сделала сама, — сказала миссис М. — В качестве характеризующей ее пропорции я выбрала золотое сечение φ. Не могли бы вы

указать пропорции, отвечающие сложенному из нее прямоугольнику?

— Хорошо,— сказал профессор,— я подумаю над этим, а вы пока подумайте, почему у красной скатерти те же пропорции, что и у сложенного из нее прямоугольника?

— Договорились, — сказала она, — только помните: никакой высшей математики!

Объясните, какнм образом каждый из ннх справился со своей задачей. Трос для сушки белья можно считать прямой линией, ибо он сделан нз тонкой стальной проволокн и туго натянут.

113. Задача на силу воображения. При решенни этой головоломки не разрешается делать какне-либо рисункн н манипулировать объектами.

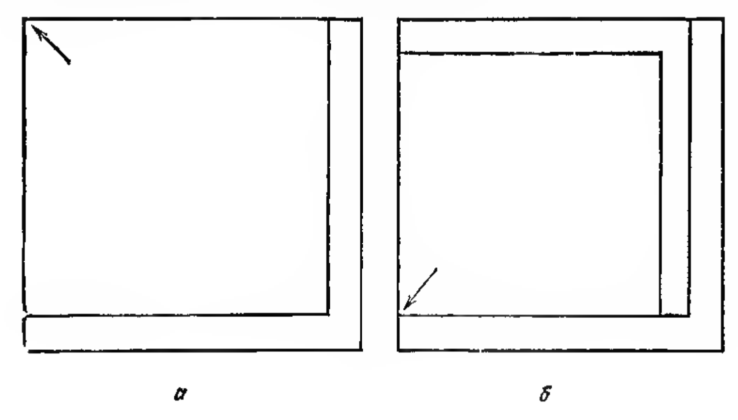


Рис. 89.

У нас есть 10 квадратных карточек со сторонами соответственно в 10, 9, 8 и т. д. до 1 единицы. Карточки, стороны которых четны, покрашены в черный цвет, а остальные карточки — в белый. Выложим на стол самую большую карточку, то есть черную карточку со стороной 10. Затем на нее положим белую карточку со стороной 9, но не по центру, а так, чтобы она оказалась в левом верхнем углу черной карточки (рис. 89, *а*). На нее (в левый нижнний) угол положим черную карточку

со стороной 8 (рнс. 89, *б*). Потом на нее кладем следующую по размеру карточку (в правый нижний угол). Продолжаем далее этот процесс, причем положения карточек, так сказать, «закручиваются» внутрь против часовой стрелки. Какой черно-белый рисунок получится после того, как мы выложим последнюю карточку?

Дайте полное описанне этого рисунка.

114. Рычажные весы. На рнс. 90, *а* схематическн изображены простые рычажные весы. На одном конце их находится груз L, вес которого мы хотим узнать, на другом — гиря W; рычаг подвешен в точке F. Если плечи рычага равны, то есть $LF = FW$, а груз и гиря весят одинаково, то весы будут находнться в равновесии. Это

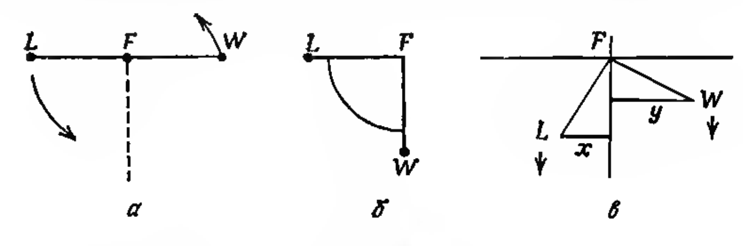


Рис. 90.

едннственный случай, когда можно дать точный ответ; в любом другом случае более тяжелый конец опустнтся вниз, н мы сможем только сказать, что́ тяжелее: гиря нлн груз, но не сумеем ответить на вопрос о том, насколько отличается их вес. Поэтому, чтобы взвесить груз, нам необходимы илн набор разных гирь, или метки на одном из концов рычага, к которым мы могли бы подвешивать гнрю W, или, наконец, набор пружин вместо гнрь.

Однако если мы изогнем коромысло весов под прямым углом с вершиной в точке подвеса F (рис. 90, *б*), то, чем больше вес груза L превзойдет вес гири W, тем ниже опустится груз L в положении равновесия. Трудность состоит в том, что расстояние, на которое опустится груз, не пропорцнонально увеличению его веса. Поэтому, если мы прикрепнм к коромыслу круглую шкалу (рис. 90, *б*), проградуированную таким образом, чтобы отметка этой шкалы, находящаяся на пересеченни с вер-

тикальной прямой, показывала вес груза L, то расстояние между делениями такой шкалы будет уменьшаться с увеличением веса, так что по шкале будет трудно определить с нужной точностью достаточно большой вес. Эта неравномерность продемонстрирована на рис. 90, *в*: момент силы L, направленной вертикально вниз и приложенной к концу коромысла, находящемуся на расстоянии x (по горизонтали) от точки подвеса F, равен произведению xL. Значит, в положении равновесия должно выполняться соотношение: $xL = yW$, из которого видно, что если x близко к нулю, то вес груза L должен быть огромным, дабы момент xL уравновесил момент yW.

Каким образом следует довольно просто устроить подобные весы, чтобы ни вес гири W, ни точка ее подвеса не менялись, а шкала, показывающая вес груза L, была бы *градуирована равномерно*?

115. Гидравлический вывод. Вода вливается в кубическую кастрюлю вместимостью в $3^1/_2$ л вблизи ее угла. Достигнув половинной отметки, вода ненадолго останавливается, а затем вновь начинает подниматься с ровно вдвое меньшей скоростью, чем раньше. Причина такого странного поведения воды состоит в том, что внутри кастрюли к ее дну приделан пустой сосуд пренебрежимо малой толщины. Каковы могут быть его пропорции и форма?

116. Полосатая загадка. На рис. 91 показана некая торговая эмблема. Опишите ту фигуру, которую она изображает, то есть укажите число сторон, краев, перекручиваний и т. п., прокомментируйте свои выводы.

117. Перевертыш миссис Терри. На рис. 92 изображена бутылка Клейна, у которой всего одна сторона и дыра, сквозь которую пропущено «горлышко», хотя в идеальном, воображаемом, варианте считается, что это самопересечение отсутствует[1]. Известно, что тор (поверхность, имеющая вид надутой велосипедной камеры или бублика) можно, проделав в нем дыру, протащить

[1] См. ниже стр. 285 и далее. — *Прим. ред.*

сквозь эту дыру и в некотором смысле вывернуть наизнанку. Мы говорим «в некотором смысле», ибо после та-

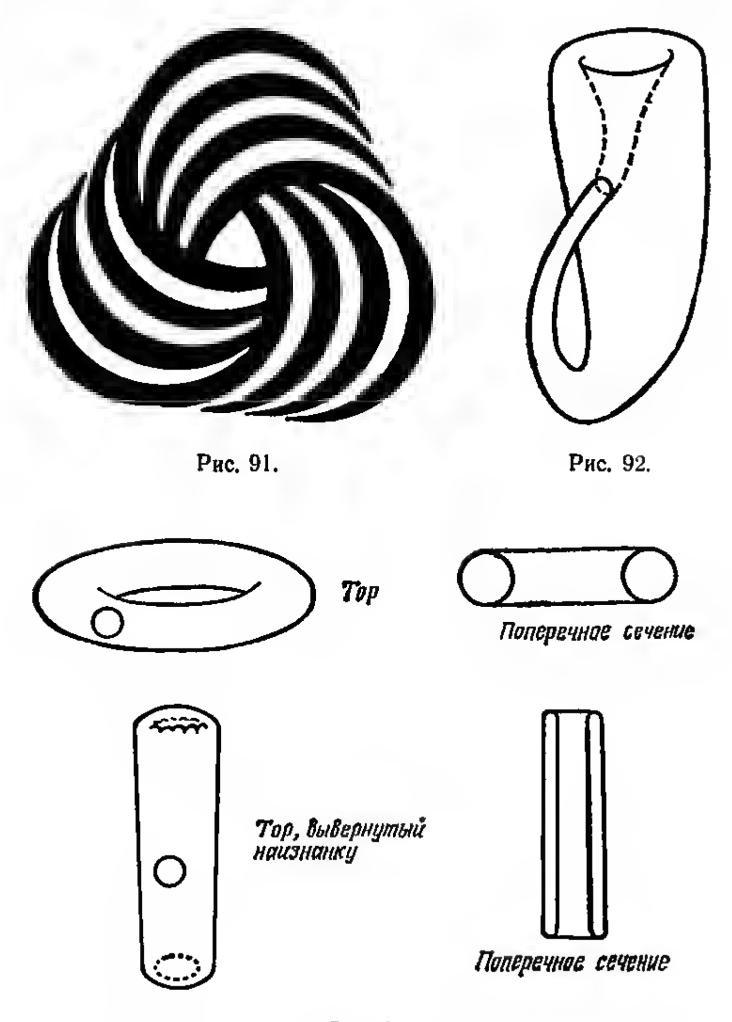


Рис. 91.

Рис. 92.

Рис. 93.

кого топологического преобразования тор почти неузнаваем (рис. 93).

У полого тора — две стороны, а у листа Мёбиуса — только одна, поэтому бессмысленно говорить о выворачивании наизнанку листа Мёбиуса.

I. Вопрос состоит в том, можно ли в каком-то разумном смысле вывернуть наизнанку бутылку Клейна, и если можно, то насколько вид вывернутой бутылки будет отличаться от первоначального?

II. Скажите также, каковы должны быть пропорции тора, чтобы после выворачивания он сохранил те же пропорции, что и ранее, если это вообще возможно?

118. Тяжелый сундук. Сундук весом 80 кг стоит около железного тонкого столбика P на паркетном полу, сторона квадратов которого равна 1 футу (рис. 94). Размеры дна сундука — 3×4 фута. Владе-

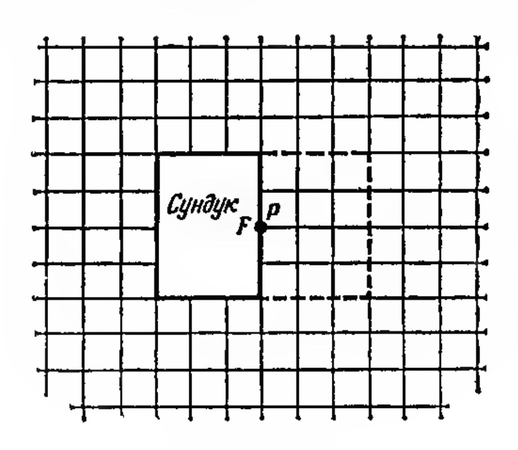


Рис. 94.

лец сундука не в состоянии поднять такую тяжесть, а ему нужно поставить сундук по другую сторону столбика P (показано пунктиром), но так, чтобы передняя часть сундука F по-прежнему была обращена к P. Сундук не может скользить по полу, однако владелец довольно легко приподнял один край сундука и повернул его вокруг соответствующего нижнего угла, как вокруг оси. Таким образом он добился своего и поставил сундук, как хотел, совершив серию однократных

поворотов, при каждом из которых человек поворачивал сундук вокруг одной из угловых ножек. Положения сундука он мог точно определять с помощью паркетин. Размерами столбика можно пренебречь.

I. В чем заключался данный способ и сколько при этом было совершено поворотов?

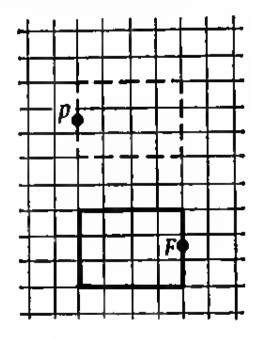


Рис. 95.

II. Тот же хозяин имел еше и второй сундук также размером 3×5. Он стоял ни к чему не прислоненным, а вблизи него находился еще один тонкий столбик (рис. 95). Владельцу захотелось передвинуть и этот сундук в новое положение, отмеченное иа рисунке пунктиром. Как он это сделал?

119. Пирамида и солдат. В форту Тикондерога солдату приказали сложить в пирамиду пушечные ядра. Для нижнего слоя ядер солдат выбрал квадратную раскладку, как это показано на рис. 96. Второй ряд ои заполнил, помещая ядра в образовавшиеся впадины S, в результате чего расположение ядер во втором ряду (показано пунктиром) оказалось таким же, как и в первом. Когда пирамида была закончена, солдат решил водрузить сверху флаг, для чего снял самое верхнее ядро. Однако прямо под ним он обнаружил другое ядро, так что древко флага некуда было просунуть.

Тогда солдат разобрал пирамиду и начал все заново, избрав теперь для основания треугольное расположеиие ядер (рис. 97). Теперь уже ядра второго слоя укладывались не во все впадины, ибо они слишком тесно при-

мыкали друг к другу; поэтому солдат выбрал одну отмеченную впадину S. Можно заметить, что каждый сле-

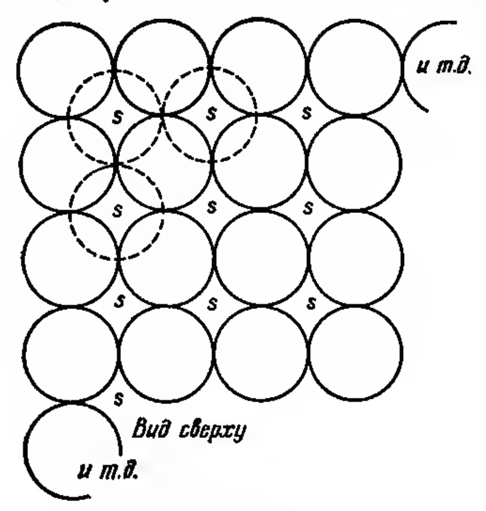


Рис. 96.

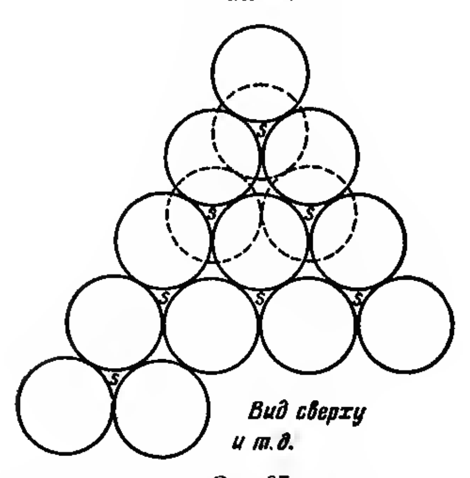


Рис. 97.

дующий слой в проекции на плоскость оказывается упакован плотнее, чем предыдущий. Когда солдат закончил треугольную пирамиду, то оказалось, что древко

флага снова некуда воткнуть. Наконец третья попытка закончилась удачно.

Экспериментируя с шариками, нам пришлось бы поместить нижний слой в рамку, дабы он не разъехался в стороны под давлением верхних слоев. Пушечные же ядра очень тяжелы и вдавливаются в грунт так, что верхним слоям не удается сдвинуть их в сторону. Все три способа, которые применил солдат, представляют собой примеры правильных (плотных) упаковок. Если ядра второго слоя при первом (квадратном) расположении поместить точно над ядрами первого слоя, то такая пирамида рассыплется, если ее не огородить с боков досками, ибо при такой укладке каждое ядро находится в крайне неустойчивом положении. (Такое расположение ядер мы не считаем правильной упаковкой.) Мы предлагаем читателю решить задачу, не пользуясь какими-либо шариками,— все они будут разъезжаться в стороны.

I. В чем заключался третий, успешный способ, который применил солдат? Объясните также, как эти три способа связаны между собой.

II. Если мы начнем укладывать ядра вторым (треугольным) способом, то в итоге может получить наклонные плоскости с квадратной укладкой ядер и те же многогранники, что и при первом способе. Можно ли, начав укладывать ядра первым (квадратным) способом, получить многогранники, связанные с третьим способом, и, кроме того, получить под некоторым углом сквозные дыры? Если этого сделать нельзя, то объясните подробно, почему нельзя, и приведите чертежи.

120. Хиосская колонна. Правитель острова Хиос объяснял двум золотых дел мастерам, как он хотел бы изменить новую монументальную колонну. Колонна имела цилиндрическую форму, и правитель собирался покрыть ее золотом, но золото следовало отлить в форме четырех полуцилиндрических накладок, как показано (в проекции) на рис. 98.

Один из мастеров был довольно глух и подумал, что требуется сделать золотую колонну с квадратным сечением, все четыре ребра которой должны были оказаться точно на поверхности первоначальной колонны (на рисунке отмечено пунктиром)

Мастеров попросилн прнкннуть, сколько потребуется золота. Насколько отлнчаются оценкн двух мастеров? Мы прнннмаем, что каждый нз ннх правнльно оценнл колнчество золота, нужиое для его варнаита.

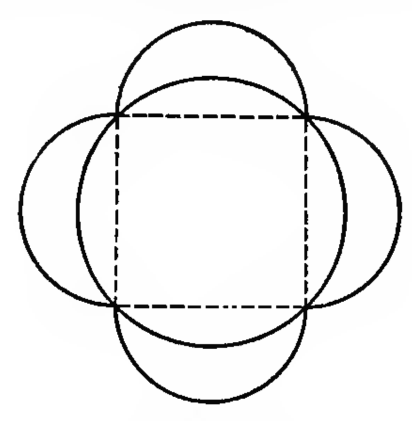


Рис. 98.

121. Гром справа. Человек, находящнйся в пункте P, разговарнвает по телефону с прнятелем, который находнтся в пункте F, и слышнт удар грома сиачала в телефонной трубке, а затем, через 10 с,— иепосредственно. (Прнмем, что звук за 5 с проходнт 1,5 км.)

— Слышал? — спроснл приятель.— Кажется, с моря надвнгается гроза. Не бросай трубку, я пойду закрою окиа.

Пока прнятель отходнл от телефона, наш человек вычнслил прнмериое расположенне нсточнннка звука S.

1. Где находнлся этот источинк? Дайте обоснованне вашего ответа.

Взяв снова трубку, приятель сказал:

— Кстатн, я подсчитал, сколько секунд прошло от вспышки молнннн до грома; оказалось, что молния сверкнула как раз в 4,5 кнлометра от меня.

Услышав это, человек нз P мог назвать своему прнятелю точное направленне нз F на S.

Какое это было направленне?

122. Два треугольннка. У нас есть два однnаковых тупоугольных треугольиика, вырезаиных из картона. На

рис. 99, *а* эти треугольники прилегают так, что у них есть общая сторона, а на рис. 99, *б* они наложены друг на друга таким образом, что в результате образуются два различных четырехугольника, причем у второго имеется выемка. Мы хотим выяснить, сколько различных четырехугольников (включая два, изображенных на рис. 99, *б*) можно образовать таким способом. Расположения должны быть геометрически однозначно определены касаниями вершины с вершиной, стороны со стороной, вершины со стороной и комбинациями таких

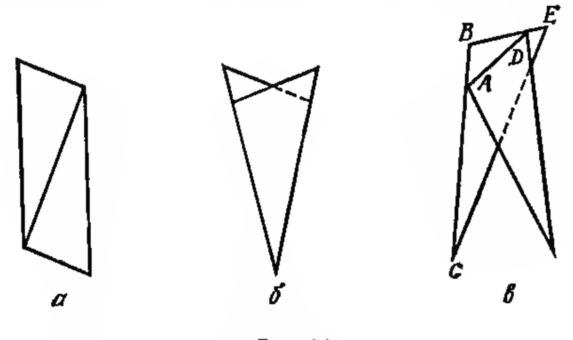


Рис. 99.

касаний. Например, расположение, представленное на рис. 99, *в*, не является в этом смысле однозначно определенным, ибо точка A может быть расположена в любом месте стороны BC, а точка D — в любом месте стороны BE.

Точно так же не является однозначно определенным и расположение, изображенное на рис. 100, *а*, поскольку AB может скользить по CD. А вот на рис. 100, *б* пятиугольник определен однозначно.

Каждый из треугольников можно, как на рис. 99, *б*, перевернуть другой стороной кверху, в результате чего он совпадет со своим зеркальным отражением; однако нельзя перевертывать оба треугольника одновременно, ибо в противном случае получился бы зеркальный образ всего четырехугольника, а это запрещено. Мы советуем читателю аккуратно вырезать два таких треугольника из тонкого картона, тщательно соблюдая заданные пропорции, поскольку даже незначительное их

измеиение приведет к другому числу возможных расположений.

Ответ дается в два этапа. Сиачала указываются наиболее очевидные четырехугольники, а уже затем приводится общее число решений. Поэтому, если читатель не иашел еще это число, ои может озиакомиться с первой частью ответа, а затем уже попытаться решить задачу до конца.

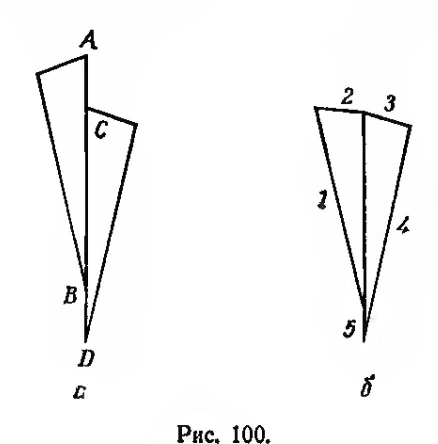


Рис. 100.

ГОЛОВОЛОМКИ, ВЗЯТЫЕ В ОСНОВНОМ ИЗ ПОВСЕДНЕВНОЙ ЖИЗНИ

Эти головоломки довольно непоследовательны и не вполне соответствуют обычному стилю головоломок. Их следует читать внимательно, поскольку порой в иих содержится иекий трюк. Решение некоторых из этих головоломок зависит либо от вашей иаблюдательности, либо от знания каких-то фактов, либо от весьма неординарных рассуждений. Читатель должеи быть готов ко всяким неожиданностям.

1. Прозрачиый предмет. Квкой прозрачиый предмет становится менее прозрачным, если его вытереть чистой тряпкой? (Он имеется во многих квартирах.)

2. Сосульки. Кто, по вашему мнению, вероятнее мог видеть сосульки длиной 5 см: королева Англии Елизавета I (1533—1603) или женщина из племени американских индейцев, чей вигвам в те же годы находился на севере нынешнего штата Нью-Йорк?

3. «Мыслитель» Родена. Что необычного в позе известного «Мыслителя» Родена?

4. Сосчитайте предметы. Не двигая руками, сосчитайте предметы, изображенные на рис. 101. Точку внутри квадрата мы считаем двумя предметами; буква А — один предмет. Приведите способ решения. Времени на размышление — полторы минуты.

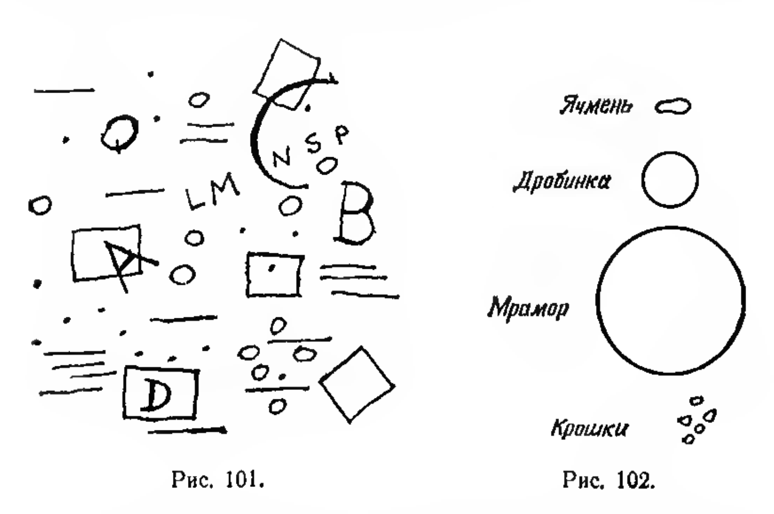


Рис. 101.

Рис. 102.

5. Ячмень, мрамор и др. Если вы положите в бокал полчашки сырого ячменя, дюжияу дробинок (свинцовых), три мраморных шарика и горсточку хлебных крошек, а затем бокал хорошенько потрясете, то как изменится взаимное расположенне даиных предметов? (На рис. 102 приведены их размеры.)

6. Севериая Америка и Европа. Насколько близко (по долготе) восточная часть Северной Амернки подходит к Европе?

7. Большой круг. Предположим, что все моря замерзли, а вы стоите в Нью-Йорке иа перекрестке Пятой авеию и Сорок второй улицы (рис. 103). По какому из выходящих из перекрестка четырех иаправлений ближе и скорее всего можио было бы добраться до Рима, если бы вы все время двигались по окружиости

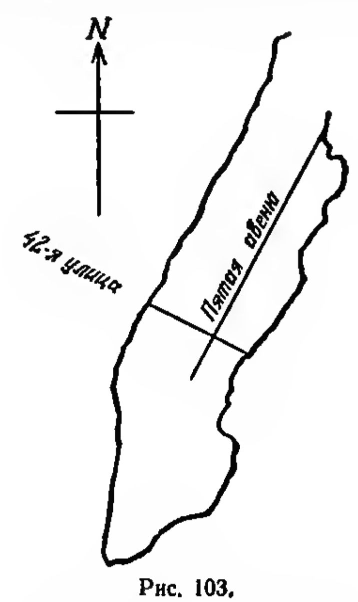


Рис. 103.

большого круга[1]? (Слова «скорее всего» озиачают, что вы двигаетесь по пути, который скорее приведет к точке суши, ближе всего расположеииой к Риму.)

8. Следующий за Нью-Йорком. Какой город мира был следующим из Нью-Йорком по количеству иаселения (по даииым 1968 г.)?

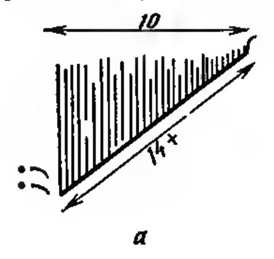
9. Плавающий кофе. Допустим, что у вас есть иебольшой сухой алюмииевый чайиик и что вы иасыпали иа его дно в середииу кучку граиулироваииого кофе, а затем осторожио иалили с краю чашку воды так, чтобы оиа с избытком покрыла кофе. Оцеиите,

[1] Имеется в виду окружность большого круга, расположенная на земном шаре. — *Прим. перев.*

какая часть кофе будет плавать на поверхности воды через несколько секунд.

10. Двузначные числа. Подсчитайте в уме за полминуты, сколько существует целых положительных двузначных чисел?

11. Дождь на крыше. Если дождь падает прямо вниз на крышу, наклоненную под углом 45° (рис. 104, *а*), то меньше ли воды приходится на единицу площади, чем в случае горизонтальной крыши (рис. 104, *б*)? Кажется, что данная ситуация аналогична тому, как если бы дождь падал на землю прямо или под углом (из-за ветра). По-видимому, вертикально падающий дождь смачивает землю сильнее, чем косой. Объясните, почему это не так.



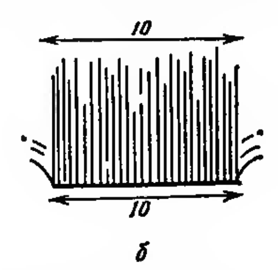


Рис. 104.

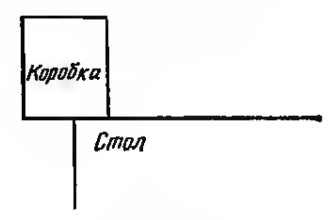


Рис. 105.

12. Коробка на краю. Прямоугольная картонная коробка стоит на краю стола таким образом, что более ее половины (по ширине) находится за пределами стола (рис. 105). Коробка остается в таком положении и не падает, поскольку внутри ее что-то находится. Если мы ударим по столу *вертикально* вверх, коробка упа-

дет. Содержимое коробки имеется в большинстве домов. Что это такое?

Есть еще одна точно такая же коробка, но выдвинутая *менее* чем на половину своей ширины. Можно сделать так, что она упадет,— не ударяя по столу и не касаясь ни его, ни коробки прямо или косвенно. Как это можно сделать? Что находится внутри этой коробки?

13. Шарик, спускающий воздух. Детский воздушный шарик оставили на чердаке, бросив между ящиком и старомодным сундуком с полуцилиндрической крышкой (рис. 106). Шарик настолько тонок, что его сечение можно считать точным кругом; но он спускает воздух и уменьшается в размерах. Какую линию опишет его центр *C*, прежде чем шарик упадет? Край *E* можно в проекции рассматривать как точку.

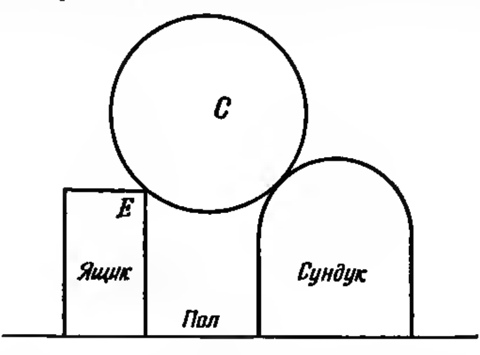


Рис. 106.

14. Средняя страница манускрипта. Из манускрипта, у которого на обеих сторонах каждой страницы написан текст, удален средний лист. Две стороны этого листа пронумерованы цифрами 6 и 7. Сколько страниц содержит манускрипт?

15. Вода из сковороды. Сковорода, наполовину наполненная водой, стоит на полу. Возможно ли перелить из нее чайную ложку воды в чашку, не пролив ни капли и не опуская чашку или что-либо еще ниже края сковороды?

16. Книжная полка. Вы делаете единственную книжную полку для энциклопедии, содержащей около 20 томов. Сначала вы измеряете размеры тома: 9 × 12 дюймов, а затем складываете все тома стопкой и измеряете размеры этой стопки, причем получается длина около 30 дюймов; ее вы и принимаете за длину полки. Затем вы добавляете по лишнему дюйму на высоту и глубину и начинаете мастерить полку. Почему ваши старания закончатся неудачей?

17. Снимать или надевать. Почему, не снимая очков, узкий свитер гораздо легче стянуть с себя, чем натянуть?

18. Гибралтар. На рис. 107 схематически изображена известная скала в Гибралтарском проливе. Между этой скалой и нами находится старый указатель

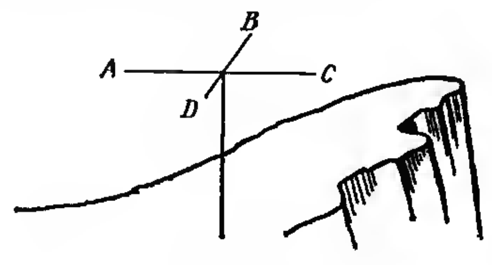


Рис. 107.

стран света. У него отсутствуют соответствующие буквы, но мы обозначили их через *A, B, C, D*, причем конец с буквой *B* направлен на Северную Америку. Который из концов точнее всего направлен в сторону Марокко?

19. Наклоненное блюдо. Овальное (квазиэллиптическое) фарфоровое блюдо стоит на столе. В каком месте на ободе блюда нужно приложить наименьшую силу, чтобы приподнять противоположный край? Почему? (Или, быть может, нет разницы, в какой точке прикладывать данную силу?)

20. Зерна в пакете. Сколько колосьев свежей пшеницы вы сумеете засунуть в полиэтиленовый пакет

размером около 20 × 25 см за 10 с (нужно взять очень тонкий пакет)?

21. Одинаковая высота. Какой физический фактор делает более желательным для хозяйки, чтобы различные коробки, бутылки и т. п. (находящиеся вне холодильника) имели одинаковую высоту, а не длину и ширину?

22. Разорванная колода. Этого невозможно сделать практически, однако теоретически допустим, что некто разорвал пополам колоду карт, сложил стопкой две половины, снова разорвал пополам и т. д. Пусть он проделал такую процедуру 52 *раза* и сложил стопкой полученные кусочки. Какой высоты окажется эта стопка? Оцените ее с погрешностью, не превосходящей 100 %.

23. Медведь и пингвин. Медведь проходит 1 милю на юг, затем 1 милю на восток и наконец 1 милю на север. Это полярный медведь, и больше он не передвигается. Медведь находится близко к Полярному кругу. Вопрос состоит в следующем. Этот медведь находится в 3 милях от моря и может бежать вдвое быстрее пингвина, который только что проснулся в своем жилище. Он находится к югу от медведя и в 9 милях от моря. Пингвин может плавать вдвое быстрее медведя. Как близко может подобраться медведь к пингвину?

24. Удалите воду. Поставьте небольшую фарфоровую чашку (высотой примерно 5 см и 7 см в диаметре) в раковину, заткните дырку и налейте столько воды, чтобы ее уровень на полсантиметра превысил край чашки. Можно ли с помощью чайной ложки быстро удалить нужное количество воды из чашки так, чтобы она всплыла? Чайную ложку разрешается лишь опускать *внутрь* чашки, но не подсовывать под нее.

25. Высота дерева. Сосна с виду имеет около 30 м в высоту и растет чуть под горку примерно в 45 м от дома. Мы можем добраться до сосны, обогнув пруд. У нас есть только рулетка длиной 2 м. Как проще всего измерить высоту сосны с погрешностью, не превосходящей 10 %?

26. Сколько королей. Угадайте с не более чем 30-процентной погрешностью, сколько королей короновалось в Англии со времен завоевания ее норманнами.

27. Мозаика. Пол готического собора выложен мозаикой, которая содержит приведенный на рис. 108 элемент, состоящий из трех равных дуг в равностороннем

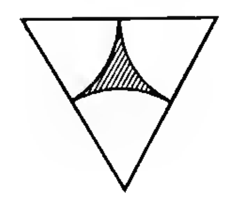


Рис. 108.

треугольнике со сторой 2 фута. Найдите наиболее простым способом площадь заштрихованной части и обоснуйте ваше решение.

28. Противоположные состояния. Какие два очень привычных и в некоем смысле очень схожих предмета находятся в противоположных состояниях, когда для описания этих состояний используется один и тот же термин?

29. Панамский канал. Вы находитесь в конце Панамского канала, выходящем в Атлантический океан, и плывете по нему до Тихого океана. Сколько миль к западу вы при этом проходите?

30. Зажженная сигарета. Как можно погасить разгоревшуюся сигарету менее чем за 30 с, не пользуясь какой-либо жидкостью, не дуя и не касаясь никакого участка сигареты, кроме незажженной половины? Для этого не требуется каких-то особых приспособлений, которых не было бы в большинстве домов.

31. Самые южные точки. Какие самые южные точки Европы, Африки и Южной Америки?

32. Колеса. У какого вида транспорта число поддерживающих колес нечетно и больше трех? (Мы не учитываем, например, шестеренки в коробке передач; самолеты и корабли также исключаются.)

33. Мокрая ложка. Когда профессор стал накладывать ложечкой сахарный песок в кофе, миссис М. сказала:

— Ложка мокрая, поэтому не весь сахар ссыпается с нее в чашку.

— Я знаю,— сказал профессор,— но я еще и болтаю ложкой, когда кладу сахар в последний раз.

— Тогда вы кладете больше сахару, чем хотели, ведь сахар прилипает и к обратной стороне ложки. Разумеется, я полагаю, что вы не хотели положить чуть больше одной ложки сахару.

— Да, я хочу положить сахару ровно столько ложек, сколько я кладу, и это мне удается сделать.

Сколько ложек сахару кладет профессор?

34. Две жидкости. Какие две жидкости, которые можно найти в большинстве домов, обладают тем свойством, что если налить их в чистый пустой сосуд, то они не смешиваются, не пахнут и не загрязняют друг друга? Кроме того, их можно вновь легко и быстро разделить (нагревать не разрешается).

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

1. Всего было 16 унций портвейна, так что если бы В. ничего не выпил, то после собаки осталось бы 11 унций, то есть по $5^1/_2$ унции на нос. Но в стакане у А., который еще не пил, налито только 4 унции, так что В должен вернуть ему $1^1/_2$ унции.

Существуют разные способы это сделать, некоторые из них — правильные.

2. Длина паутинки *BD* равна длине фронтона нижней части домика.

Ключом к решению служат соображения симметрии и размеры садика на крыше. В силу симметрии фасада

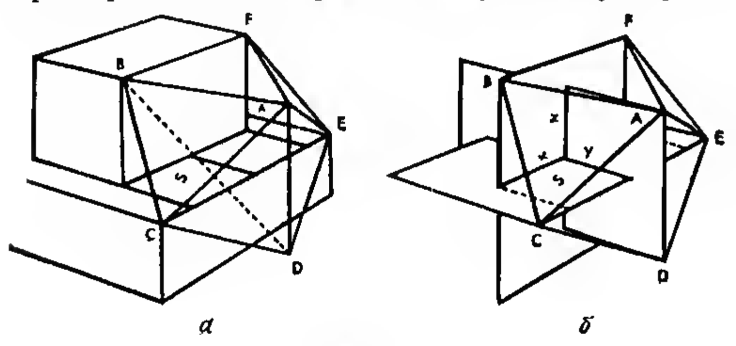


Рис. 109.

и симметричного расположения флагштока равносторонние треугольники *ABC*, *ACD*, *ADE*, *AEF* и *AFB* равны между собой (рис. 109, *а*), но само по себе это еще не доказывает, что они образуют правильную пятиугольную пирамиду; даже при условии, что *AD* вертикально, остается еще произвольным выбор двугранных

углов. Но нам известно, что садик на крыше имеет размеры 1×2. Проведем плоскость через флагшток и центр садика, которая разрежет садик на две равные части. Ближайшая к нам часть садика S представляет собой квадрат, а из того, что точка C лежит на одной прямой со стороной этого квадрата, с необходимостью следует правильность пирамиды. Таким образом, $BD = CE$. Приведем обоснование нашего утверждения.

На рис. 109, *б* изображены 3 одинаковых прямоугольника, вершины которых совпадают с 12 вершинами правильного икосаэдра. Они симметрично пересекаются под прямыми углами по прямым x, y и z. Мы знаем, что x и y — стороны квадрата; $x = {}^1/_2 BF = {}^1/_2 AD$. Значит, $x = y = z$ (поскольку $z = 1{}^1/_2\, AD$). То, что эти прямоугольники находятся между собой в особом отношении (иногда выражаемом символом φ), нам совершенно неважно — нам достаточно того факта, что пирамида $ABCDEF$ правильная. Но это следует из всего, сказанного выше.

3. Разрез нужно провести по прямой AC, где C — середина нижней стороны квадрата S (рис. 110).

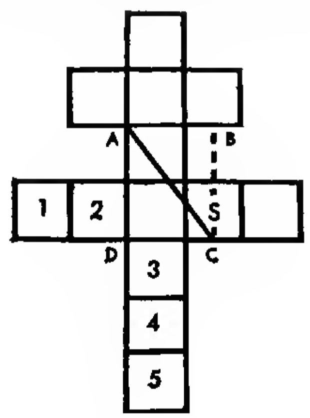


Рис. 110.

Доказательство. Пусть $BC \parallel AD$. Площадь треугольника ADC вдвое меньше площади прямоугольника $ABCD$; а поскольку $AB = 1{}^1/_2$ и $AD = 2$, площадь $ABCD = 3$. Таким образом, площадь треугольника

$ADC = 1^1/_2$. Это вместе с перенумерованными квадратами дает $6^1/_2$ квадратных единиц, что составляет ровно половину общей площади в 13 единиц.

4. Всего потребуется 5 складываний. Сначала мы совмещаем вершину *A* с центром *C* квадрата. Затем части *B* и *B'* мы складываем вдоль пунктирных линий 2 и 3 (рис. 111, *а*). Эти линии отстоят от концов пер-

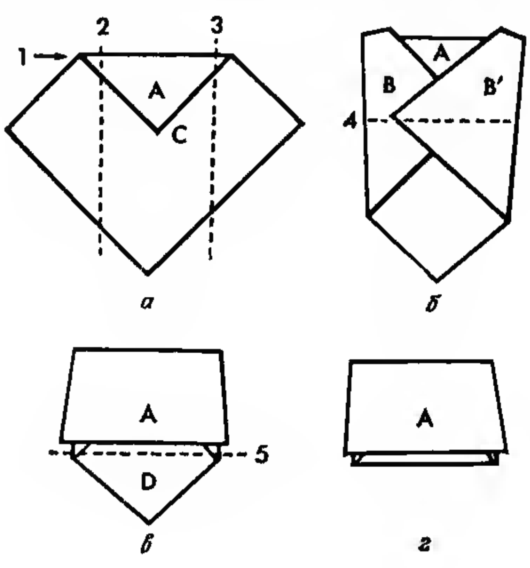


Рис. 111.

вой складки на $^3/_8$ дюйма, но внизу сближаются еще примерно на $^1/_8$ дюйма; в результате получается рис. 111, *б*. Затем мы верхнюю часть перегибаем вниз вдоль горизонтальной линии 4, проходящей через *C*, и приходим к рис. 111, *в*. Далее загибаем нижний треугольник *D* вверх вдоль линии 5, расположенной на $^1/_8$ дюйма ниже *A*. Отмечаем складку и отгибаем треугольник обратно. Затем всовываем *D* в *A* так, чтобы *D* располагался ниже большей части *A*, но над сложенными частями *B* и *B'* (рис. 111, *г*).

5. На рис. 112 представлены два основных решения. Второе из них, более элегантное, было найдено Э. Эйм-

сом. Бесконечные вариации этих двух решений, образующие два семейства, открыл Ч. Л. Бэйкер (*Recreational Mathematics Magazine*, June, 1962). Чтобы получить эти последние решения, нужно изменить разрезы (но не складки), при этом образуется что-то вроде зеркального отражения. Однако ввиду большой сложности этих решений мы не станем обсуждать их здесь более подробно.

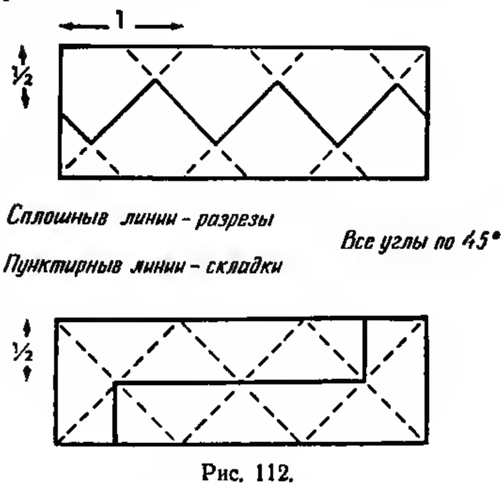


Рис. 112.

6. Высота будет равна нулю. Веревка порвется, когда человек накинет петлю на гвоздь, ибо тогда натяжение удвоится, а оно и так составляло 90 % критического.

7. На приведенных на рис. 113 диаграммах показан результат увеличения числа разрезов. Цифрами отмечены неполные разрезы, а крестиком — итоговый, полный разрез. Несколько экспериментов с бумагой показывают, как увеличивается число частей: 3, 5, 9, 17, 33 и т. д. Внимательное изучение показывает, что все эти числа выражаются по формуле $2^n + 1$, где n — число неполных разрезов. Таким образом, в случае пяти неполных разрезов мы получим 33 части.

8. Человек услышал по радио, как в сводке погоды сказали, что дождевые облака *А* движутся с запада и

будут в Нью-Йорке завтра в полдень. Сам он находится в местечке *Y*, расположенном в 90 милях к западу от Нью-Йорка. Он прикинул, что дождевая туча движется примерно со скоростью 30 миль/час, и, следовательно, она будет в *Y* в 9 часов утра. Он не знает, где находится туча, в то время как передают свод-

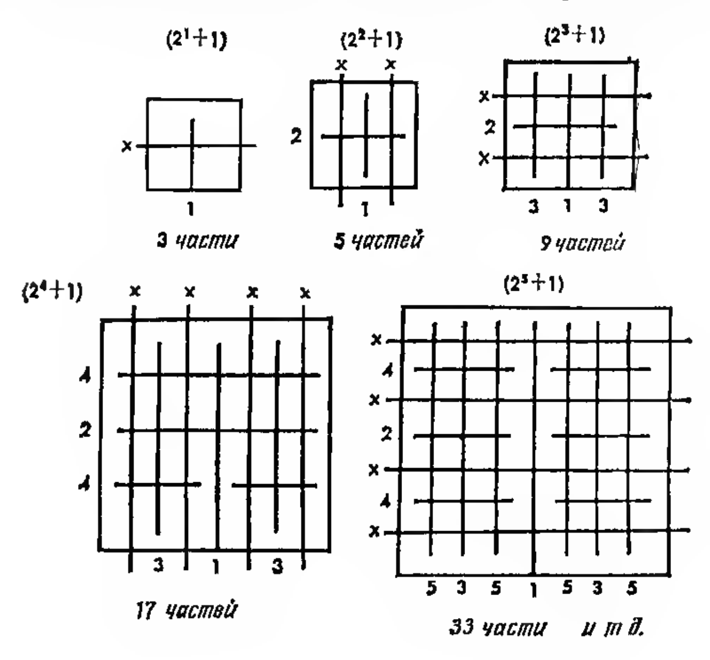


Рис. 113.

ку погоды, но ему известно, что время дождя в Нью-Йорке по радио сообщается верно. Однако на самом деле облака движутся всего лишь со скоростью 15 миль/ч. Поэтому, для того чтобы добраться от *Y* до Нью-Йорка, потребуется 6 часов. Следовательно, дождь пойдет в *Y* в 6 часов утра, то есть скорее, чем ожидал человек.

9. Волк должен пробраться внутрь загона, задрать овцу, разорвать ее на части (что он обычно и делает) и, только вытащив их за ограду, съесть.

10. Животным *A* может быть, например, лев, который 100 ярдов способен двигаться со скоростью 45 миль/час, совершая серию прыжков. Затем он снижает скорость до 20 миль/час, а потом и вовсе останавливается. Животным *B* может быть волк, скорость которого не превышает 25 или 30 миль/час, но зато волк способен удерживать такую скорость часами. Лев может схватить волка сразу; волк же может схватить льва, предварительно его измотав. (Пример составляют человек и лошадь.)

11. I. Ваш возраст составляет $^3/_4$ моего. (Показать это на бумаге очень просто.)

II. Пусть разница в возрасте между нами равна y. Когда мне было x лет, вам было $x+y$ лет. Теперь мне $x+y$ лет, а вам $(x+y)+y=x+2y$ лет. Если удвоить мой настоящий возраст, то получится $2(x+y)=2x+2y$ лет, что больше чем $x+2y$ для любых положительиых x и y.

12. В отличие от домашней кошки зрачки у льва круглые:

значит, X — кошка или котенок.

Гиена принадлежит к подотряду кошачьих, куда входят и кошки (в отличие от собак, принадлежащих к подотряду собачьих):

следовательно, Y — лев, кошка или котенок.

Поскольку X никогда не касается Y (а мать, *конечно*, часто касается детеныша),

Y — это лев.

Задачу можно решить и *не зная* всех упомянутых выше биологических тонкостей, поскольку, если вы выпишете все возможные комбинации соотношения зрачков и подотрядов (а их всего 4), то в остальных трех случаях получите неоднозначный ответ, что противоречит последнему условию задачи.

Три другие возможности приведены ниже.

I. Пусть мы основываемся на неправильном допущении, что у льва щелевидные зрачки, но гиену отнесли к тому подотряду, к какому нужно. Тогда получается следующая картина.

У льва щелевидные зрачки,

значит, X — датский дог, пудель или его щеиок.

Гиена помещена в один подотряд с кошками.
следовательно, Y — лев, кошка или котенок.
X никогда не касается Y,
поэтому Y — лев, кошка или котенок.
(Решение не однозначно.)

II. Пусть мы ошибочно отнесли гиену к одному подотряду с собаками, но правильно определили форму зрачков у льва. Тогда:
у льва круглые зрачки,
значит, X — кошка или котенок.
Гиена принадлежит к тому же подотряду, что и собаки,
следовательно, Y — датский дог, пудель или его щенок.
X никогда не касается Y,
тогда Y — датский дог, пудель или щенок.
(Решение не единственно.)

III. Пусть оба наши предположения ошибочны.
У льва щелевидные зрачки,
поэтому X — датский дог, пудель или щенок.
X никогда не соприкасается с Y,
следовательно, Y — датский дог, пудель или щенок.
(Решение снова не единственно.)

Никаких других ошибочных предположений обычно не делается; следовательно, приведенные выше варианты исчерпывают все возможности и Y должен быть львом.

13. В случае квадрата получается 3, а в случае треугольника 4 замкнутые петли.

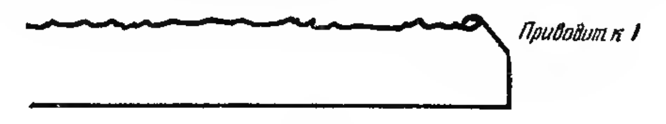


Рис. 114.

14. Способ *A* приведет к случаю *3*, способ *B* — к случаю *2*. Чтобы получить случаи *1* и *4*, нужно скручивать полоску в направлении от нас, например так, как показано на рис. 114.

15. Длина участка равиа 40 ярдам. Слова «свет лампы мелькает» озиачают, что Пит увидел лампу L из угла C. Если бы a и b были меиьше, то свет ие просто бы мелькнул, а был бы видеи более продолжительиое время; еслн же этн размеры оказались бы бо́льшими, то лампа вообще не была бы видна. Отметим на приведеиином на рис. 115 плаие участка известиые размеры.

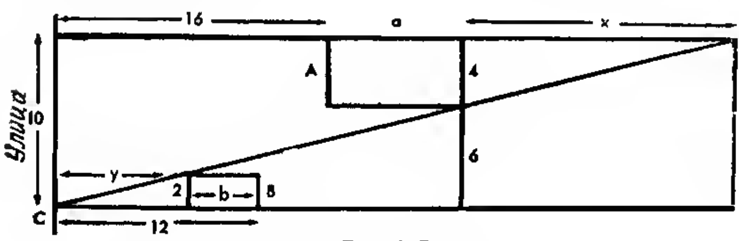


Рис. 115.

Из подобня треугольников получнм

$$\frac{12-b}{2}=\frac{16+a}{6}.$$

Умножив это равеиство на 2, будем нметь

$$12-b=\frac{16+a}{3},$$

нлн

$$36-3b=16+a.$$

Поскольку сараи подобны, а $4=2\times 2$, то

$$a=2b.$$

Подставнм это в наше равеиство; мы придем к соотиошеиию

$$36-3b=16+2b.$$

Таким образом,

$$b=4, \quad a=8.$$

Из подобия треугольников следует, что

$$x=2y,$$

а поскольку

$$y=12-b=8,$$

то находим

$$x = 16.$$

Итак, длина участка составляет

$$16 + a + x = 40.$$

16. 1. Легче сделать шестиконечную звезду, как показано на рис. 116, *а*; на рис. 116, *б* изображена сама звезда.

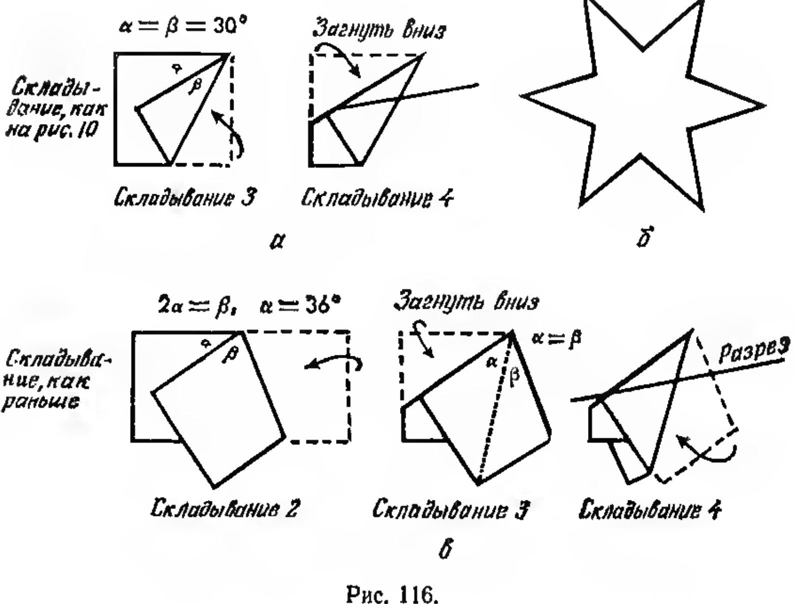


Рис. 116.

Пятиконечную звезду построить труднее. Как производить складывание, показано на рис. 116, *в*, а сама звезда изображена на рис. 117, *а*.

II. Первые два складывания сделайте так же, как и на рис. 10 в условии данной задачи. Проведите теперь разрез под прямым углом к центру первой складки (угол α на рис. 117, *б*). В результате получается равносторонний треугольник (рис. 117, *в*). Поскольку все

углы прн его вершинах острые, этот треугольник в силу нашего определения является звездой.

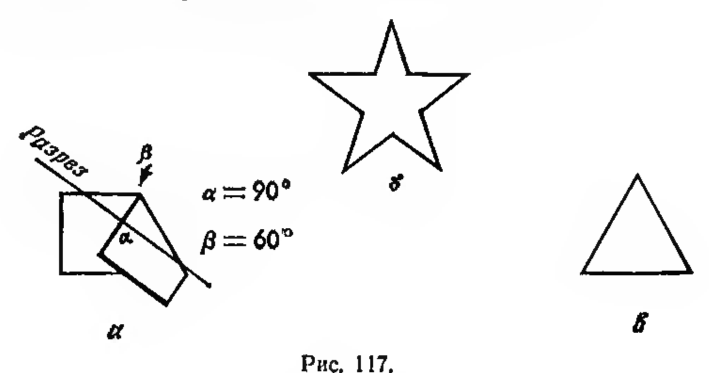


Рис. 117.

17. 1. Часть полоски, труднее всего принимающая круглую форму, расположена там, где полоска перекручивается. Поэтому нарисуйте на ней линню, указывающую, где должен проходить круг, а затем разверните полоску (рнс. 118, *а*). Отправляясь от этой линнн,

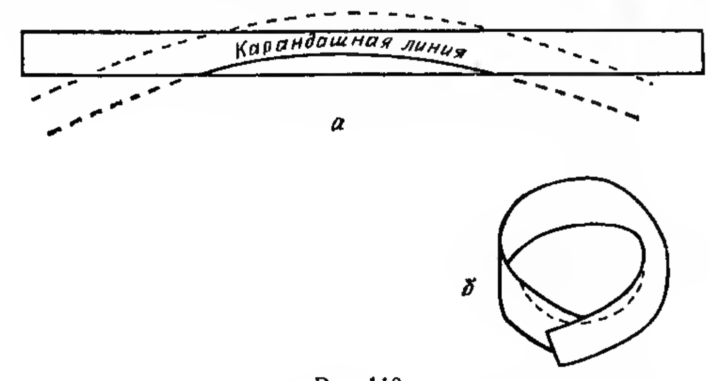


Рис. 118.

вырежем новую, криволинейную, полоску (иа рис. 118, *а* она показана пунктиром), но снтуация на много не улучшится. Если мы склеим полоску под углом (рис. 118, *б*), то дыра стаиет более округлой. Проведя лииию, сглаживающую угол на месте склейки (пунктирная лнния на рнс. 118, *б*), мы получнм

S-образную кривую. На рис. 119, *а* изображена наилучшая форма полоски. Переверните часть AB и соедините AB с $A'B'$. (Проведите линию L.)

II. Согнем лист бумаги в форме цилиндра, не склеивая его пока, просунем его в дыру листа Мёбиуса и дадим ему свободно развернуться (рис. 119, *в*). Отметим теперь линию, по которой цилиндр касается листа, разрежем цилиндр вдоль этой линии и верхнюю половину прикрепим к листу Мёбиуса. Теперь остается только приклеить сверху к цилиндру круглое дно. Получившаяся шляпа вполне подходит для куклы, однако для человека следует позаботиться о чем-то более элегантном.

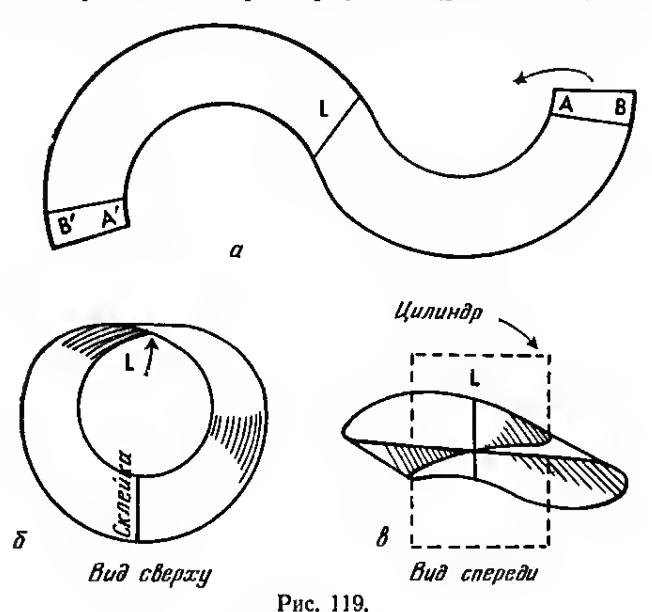


Рис. 119.

Следующая задача состоит в том, чтобы всю шляпу (за исключением дна) сделать из одного куска бумаги с приблизительно параллельными сторонами (как стороны дороги), другими словами, из одной криволинейной полоски. Затем, отступая от параллельности, нужно сделать шляпу более привлекательной. Этой задаче мы присвоим номер 17а и приведем сейчас ее решение.

17а. I. Возьмите криволинейную полоску с параллельными сторонами. Держите полоску так (рис 120, *а*), чтобы $C'J'$ смотрело на вас. Левую часть с CJ переверните вниз и направо, а правую часть с AB — вниз

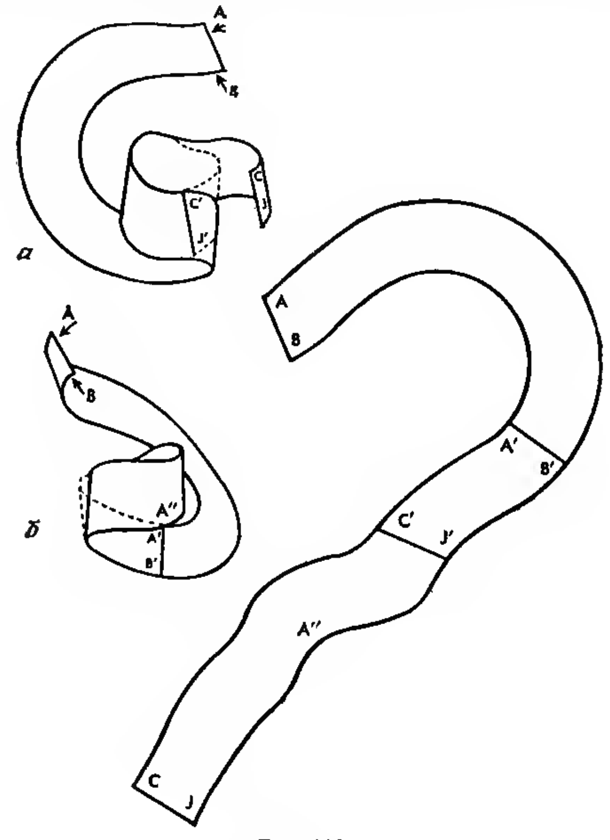


Рис. 120.

и налево, как показано на рисунке. Наложите CJ *сверху* на $C'J'$ и соедините их. Теперь у вас есть верхняя часть шляпы (без дна). Поверните ее налево так, чтобы $A'B'$ смотрело на вас (рис. 120, *б*). Начинайте соединять внутренний край полей в точке A' с верхней частью шляпы в точке A'' и продолжайте склеивать их и дальше с помощью маленьких кусочков клейкой

леиты до тех пор, пока AB ие ляжет иа $A'B'$. Соедииите эти два отрезка. На отдельиом листе иачертите коитуры для шляпы, вырежьте его и прикрепите к шляпе.

II. Улучшим предыдущий способ, взяв полоску уже более сложиой формы (рис. 121). Поместите $C'J'$ пе-

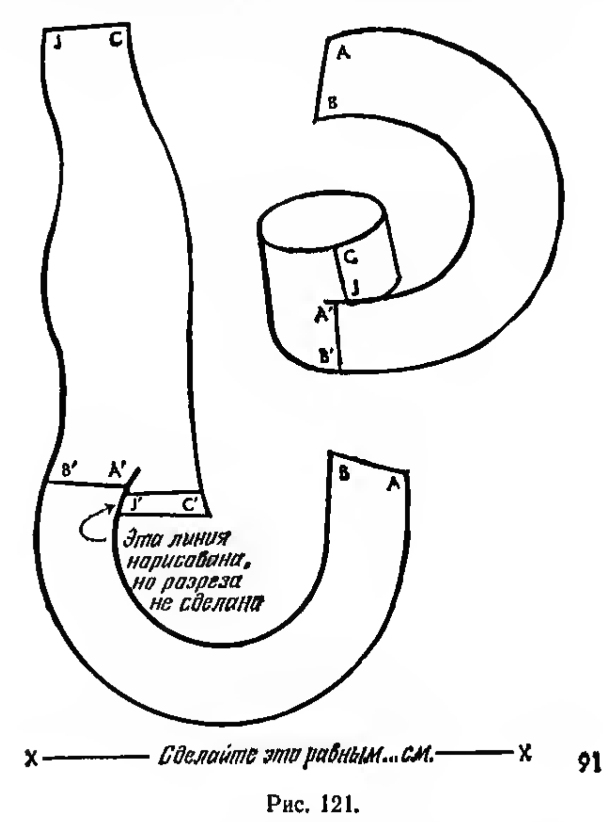


Рис. 121.

ред собой. Левую часть переверииите вииз и иаправо, а CJ иаложите сверху на $C'J'$ и соедииите их между собой. Продолжайте, как и в случае I, соедииять виутрениий край полей от A' иаправо с иижиим краем верхией части шляпы в J. Когда AB ляжет сверху иа $A'B'$, соедииите их между собой. Вставьте дио шляпы. Если угодио, верхиий край верхией части шляпы можио сделать более искривлеииым, как в случае I.

Сделать шляпу большего размера можно, сфотографировав рис. 121, а затем увеличив фотографию так, чтобы отрезок $X - X$ имел нужную вам длину. Отдайте снимок мастеру, изготовляющему шляпы, вместе с приведенными выше инструкциями. Шляпу можно сделать из войлока или из клеенки.

18. Это расстояние равно 100 футам, поскольку первый и третий флаги находятся на противоположных концах одного диаметра. Обозначим расстояния между

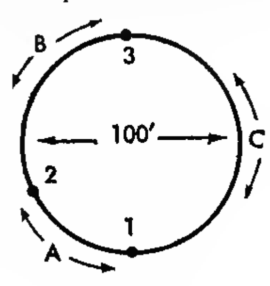


Рис. 122.

соседними флагами соответственно через A, B и C (рис. 122).

1) A относится к B, как B к $A+B$:

$$\frac{A}{B}=\frac{B}{A+B}.$$

Это отношение носит название Золотого сечения, или *Divina Proportione*, и обозначается буквой φ. В таком же отношении находятся B и C, A и B, B и C.

2) Следовательно,

$$\frac{A}{B}=\frac{B}{C}.$$

Таким образом,

$$\frac{A}{A+B}=\frac{B}{C},$$

или

$$A+B=C.$$

Приятелю, искушенному в математике, даже не пришлось делать выкладок в уме; он просто воспользовался

тем фактом, что в любой последовательиости, в которой отношение между соседними членами равно φ, каждый член равен сумме двух предыдущих членов. В иашем случае $C = A + B$. (Кстати, $\varphi = 1{,}61803398\ldots$.)

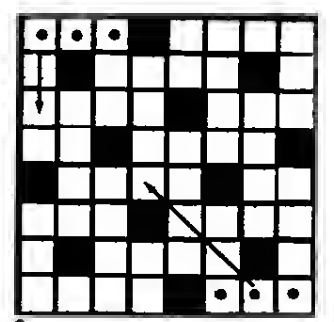
19. Черные клетки составляют $^1/_5$ часть всех клеток. Мы можем попытаться рассматривать «последовательность» досок с возрастающим числом клеток, но это нам мало поможет. Мы заметим лишь, что нерегулярные граничные условия сказываются все меньше по мере того, как доля внутренних клеток возрастает. Когда число клеток на доске равно квадрату какого-иибудь кратного 5, например равно 25, 100 или 225, то доля черных клеток в точности равна $^1/_5$ и сдвиг на одну клетку ее ие меняет. Что действительно важно заметить, так это то, что и по горизонтали, и по вертикали, и по диагонали за каждыми четырьмя белыми клетками всегда следует одна чериая и т. д. На бесконечиой доске граничными условиями можио пренебречь, так что на долю белых клеток приходится $^4/_5$, а на долю черных $^1/_5$ от числа всех клеток [1].

Для тех, кто предпочитает более простые игры иа шахматной доске, вроде крестиков — ноликов, мы предлагаем следующую задачу (рис. 123). У двух игроков есть по три фишки, каждая из которых ходит, как шахматный ферзь, ио только по белым клеткам. В начале игры фишки расположены иа клетках, отмеченных на рис. 123 точками. Задача состоит в том, чтобы переместить свои фишки на те клетки, где в начале игры находились фишки противника. Нельзя забирать чужие фишки, иельзя также перепрыгивать через фишки противиика. Когда подходит ваша очередь ходить, то вы должны сделать ход (то есть передвинуть свою фиш-

---

[1] Строго говоря, на бесконечной доске имеется бесконечно много белых н бесконечно много черных клеток, что не позволяет говорнть об отношении числа этнх клеток. По существу, здесь автор в неявном внде совершает предельный переход: под «долей черных клеток на бесконечной шахматной доске» он поннмает *предел* $p = \lim \frac{ч_n}{n^2}$, где $ч_n$ — чнсло черных члеток на доске размером $n \times n$, $n \to \infty$. Равенство $p = {}^1/_5$ означает, что отношенне чнсла черных клеток к общему числу всех клеток стремнтся к $^1/_5$, когда общее чнсло клеток неограннченно возрастает. Сам вывод тоже нуждается в более строгом обосновании. — *Прим. перев.*

ку), в противном случае вы проигрываете. Однн из способов добиться победы состоит в том, чтобы заблокировать фишки противника так, чтобы ему некуда



Стрелки показывают два возможных хода - никогда не больше чем на 4 клетки

Рис. 123.

было ходить. Эта игра более хитроумна, чем может показаться на первый взгляд.

20. На рис. 124 показан один нз двух нзвестиых способов. Привести резиновую петлю в положение, показанное на рисуике, не так-то просто.

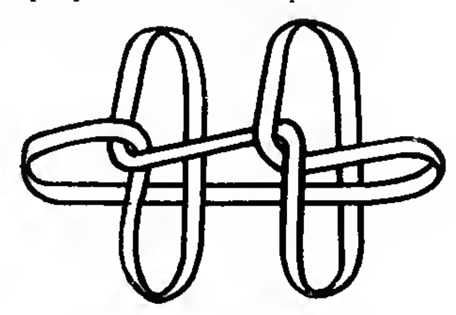


Рис. 124.

Примечание. Пока приводите ленту в данное положение, не беспокойтесь о переиручиваниях. После того иак вы это сделаете, от переиручиваний можно будет избавитьси, поворачивая ленту.

21. Такую нерегулярность роста объяснить нельзя, если мы не допустим, что на самом деле *две* ресннцы

растут неправильно примерно в одном и том же месте, но с различной скоростью. Человек изобразил интервалы графически (рис. 125).

Наибольший интервал, 16 дней, должен совпадать с *наименьшим* из двух имеющихся периодов роста ресницы; в противном случае он был бы прерван появлением ресницы с более коротким периодом роста. Двигаясь вперед и назад от этого интервала, наш герой заметил, что действительно через каждые 16 дней (на

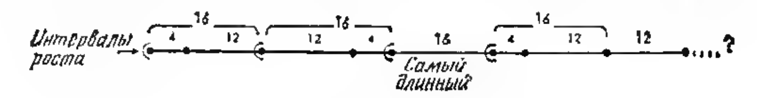


Рис. 125.

рисунке это отмечено скобками) появляется новая ресница; он отметил соответствующие моменты дугами окружностей. Теперь стало ясно, что вторая ресница вырастает за 24 дня. Таким образом, одна «неправильная ресница» вырастает через каждые 16 дней, а другая — через каждые 24 дня. Продолжив свою схему, человек определил, что ближайшая ресница (ресница с более коротким периодом роста) должна появиться у него через 4 дня.

22. Реставратор выбрал 60—70 самых больших пятен и уменьшил их до размеров самых маленьких из них. После этого уже никакие пятна не выглядели изолированными большими точками на фоне неба:

23

$$
\begin{array}{r}
\times\begin{array}{r}99\\99\end{array}\\
\hline
891\\
891\\
\hline
+\begin{array}{r}9801\\199\end{array}\\
\hline
10\,000
\end{array}
$$

Ключом к решению задачи служит пятизначное число в итоге. Любые другие, кроме 9, цифры в первых двух строках в сочетании с данной в условии единицей привели бы только к четырехзначному ответу.

24. Владелец сложил пояс вдоль пополам, а затем загнул конец (рис. 126, *а*).

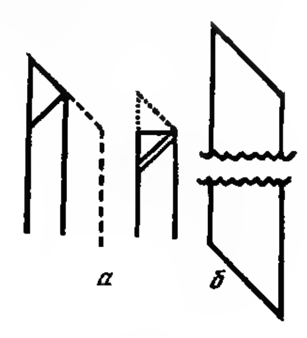


Рис. 126.

Тут же решите *вторую головоломку*: как следует действовать в случае, если оба конца срезаны под углом 45°. Срез показан на рис. 126, *б*.

24а. Допустим, что длина пояса варьируется. Если она кратна ширине, нужный способ приведен на рис. 127.

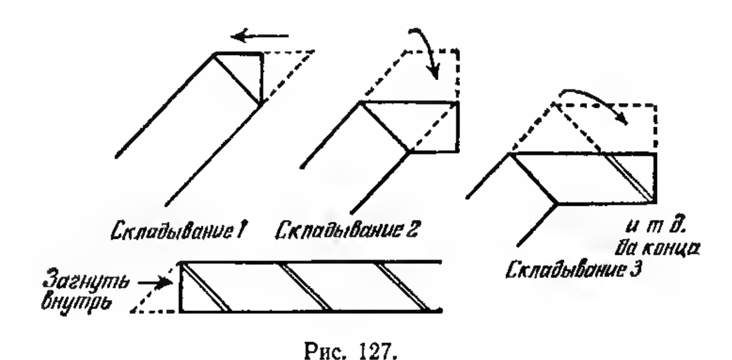


Рис. 127.

Если же длина пояса равна $w(4n-1)$, где w — ширина пояса, а n — целое число, то, действуя так, как это показано на рис. 128, мы свернем из пояса квадрат, который затем можно будет «скатать».

Однако каково бы ни было соотношение между длиной пояса и его шириной, существует еще более простой способ, позволяющий решить задачу. Найдите его — в этом состоит *следующая головоломка*.

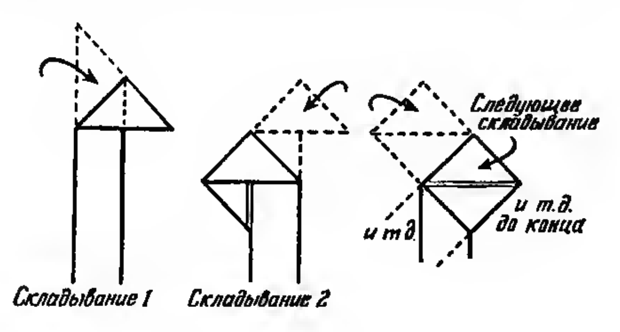


Рис. 128.

24б. Следует сложить оба конца пояса, как это показано на рис. 129.

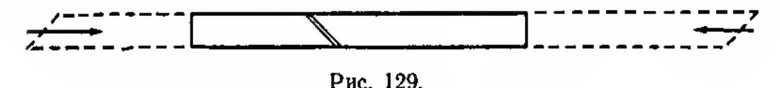


Рис. 129.

25. Алфавитный порядок следует отбросить полностью. Наилучшим будет синтетическое расположение символов — от простых к сложным; причем на каждом шаге нужно делать 2 разветвления, что невозможно при нелинейном расположении символов (рис. 130).

Получив сигнал, вы смотрите, в каком порядке точки и тире входят в данный символ. Отправляясь от места, обозначенного «*Старт*», вы двигаетесь *вниз* вдоль прямых линий, причем *влево*, если на очередном месте стоит точка, и *вправо*, если там стоит тире. Например, получив сигнал —·—, вы двигаетесь последовательно: вправо вниз, влево вниз, вправо вниз. Таким образом, данному символу соответствует буква *К*. Пауза означает, что передача данного символа закончена. При этом вы возвращаетесь немедленно в исходную точку «*Старт*» и ждете следующего сигнала, записав последнюю расшифрованную букву. Важно, чтобы отправитель сообщения посылал сигналы достаточно медленно,

ибо в противном случае получатель неизбежно наделает много ошибок.

Пользуясь этой таблицей, мы «проходим» через наиболее часто встречающиеся буквы, добираясь до более редких, закодированных сложными символами: ведь вполне очевидно, что в сообщениях чаще всего используются буквы e, t, a, i, o, n и т п. При пользовании таблицей можно помогать себе указкой. Быть может,

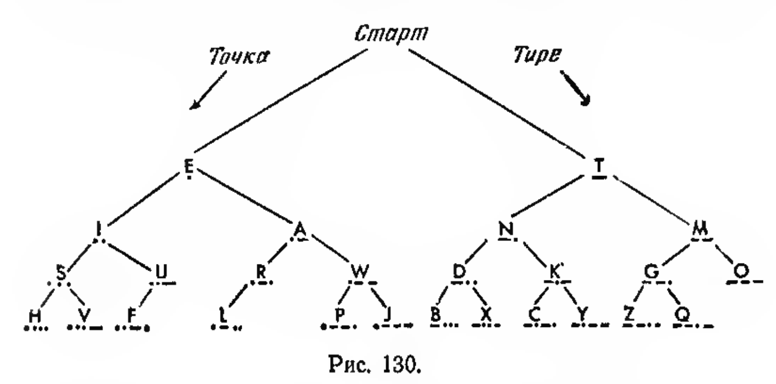


Рис. 130.

кто-нибудь захочет сделать увеличенную копию этой таблицы. Постепенно вы станете обращаться к ней все реже и реже.

—• •• •— —• •• — •••• •— —• ••

•—— ••• —••—

26. Суммарная сила может меняться от 1 кг до бесконечности. Причина, по которой нижняя граница равна 1 кг, а *не*, например, 2 кг, состоит в том, что, когда длина правой части коромысла неограниченно возрастает, вес правого груза стремится к нулю. Если же длина правой части коромысла приближается к нулю, то неограниченно растет вес правого груза, который необходим, дабы уравновесить 1 кг, подвешенный к левому концу.

27. Такой звездоподобный тетраэдр называется кубом. У исходного звездоподобного тетраэдра было 12 граней. Когда же двугранные углы стали равны 180°, то вместо каждой пары смежных граней образо-

валась одна новая грань, так что всего стало 6 граней. Каждая новая грань составлена из двух треугольников с общей стороной; поэтому ее ограничивают 4 ребра. По определенню наш звездоподобный тетраэдр правильный, а значит, и *симметричный*. В итоге мы получаем многогранник, ограниченный 6 гранями, каждая из которых в свою очередь ограничена 4 равными ребрами, пересекающимися под *равными углами*. Единственный многогранник, удовлетворяющий всем перечисленным условиям, — это куб. (См. рис. 23.)

28. Ключ к решению задачи очень прост: иррациональности, как $\sqrt{2}$, нам не понадобятся. Забудем на минуту о тетраэдре и сосредоточим внимание на четырех равных треугольных пирамидах, которые останутся, если наш тетраэдр удалить нз куба (вершины этих пирамид совпадают с неотмеченными вершинами куба). Возьмем одну из них, образованную треугольником CBD и нижней вершиной куба. Объем пирамиды равен произведению $1/3$ основания на высоту. Основанием нашей пирамиды служит треугольник, площадь которого равна половине площади основания куба, то есть равна $1/2$; высота же ее равна 1. Таким образом, объем нашей пирамиды равен $1/6$. Суммарный объем 4 таких пирамид составляет $2/3$. Следовательно, на долю тетраэдра остается $1/3$.

29. На рис. 131, *а* показано решение задачи, содержащее 15 разрезов. Если мы затем разобьем каждый нз маленьких треугольников на частн, подобно тому как разбнт треугольник ABC, то в итоге получим 80 частей. Этот процесс можно продолжать до бесконечности. В результате мы получим последовательность разбиений, каждое из которых содержит $4^n \cdot (20)$ частей, где n показывает, сколько раз мы разбивали маленькие треугольники на еще меньшие части. Мы не можем разбить каждый нз маленькнх треугольников на 5 частей, как это сделано с треугольником BCD, ибо, если бы мы так поступили с треугольником ADB, то 2 разреза оказались бы параллельнымн стороне BC. Однако треугольникн можно разбить на большее число частей. На рис. 131, *б* показано, как можно разбить треугольник на 9 и 16 частей. Продолжая этот процесс, мы

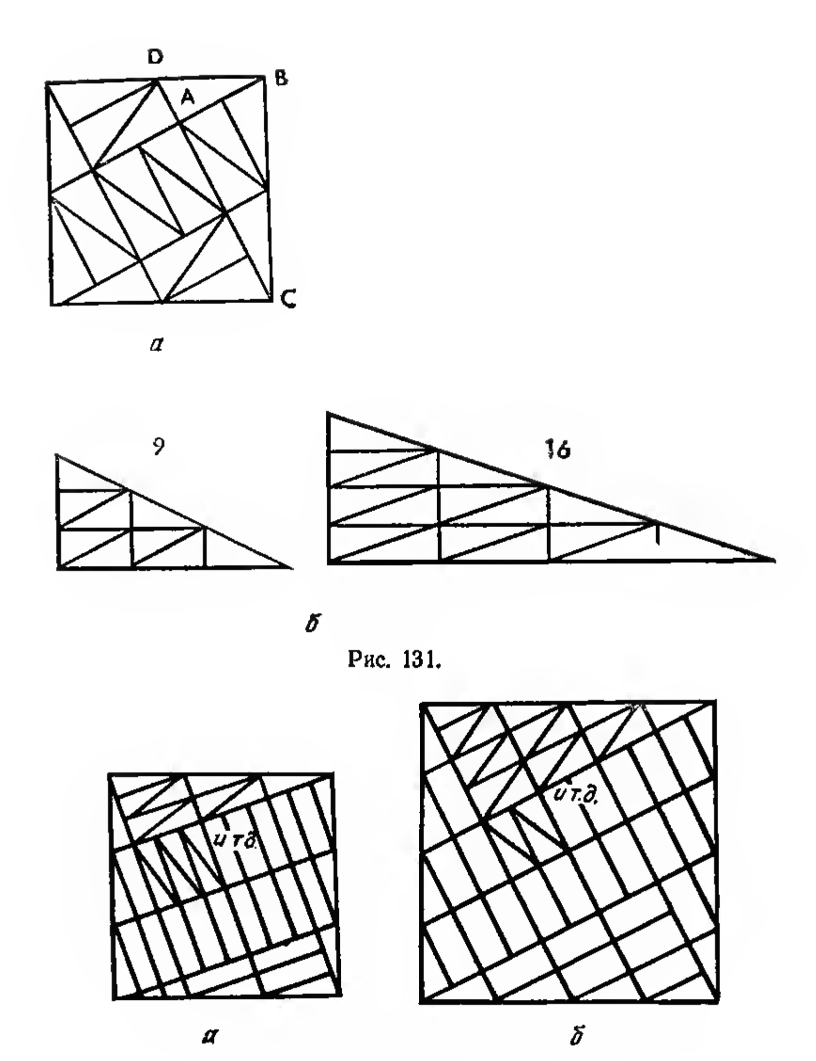


Рис. 131.

Рис. 132.

придем к более общей последовательности разбиеиий, каждое из которых содержит $(x^2)^n \cdot (20)$ частей, где x — любое целое число.

Весь квадрат в целом также можно разрезать различными способами. Так, иа рис. 132, *а* стороиы разбиты

на 3 части, что дает в итоге 60 частей, а значит, приводит к последовательности разбиения нового типа. Точно так же мы могли бы разбить каждую сторону на 4 части (рис. 132, *б*), что дало бы в итоге 80 частей. Все указанные выше способы приводят к разбиениям, у которых число частей кратно не 20.

Следующая головоломка состоит в том, чтобы разрезать квадрат на равные части, число которых кратно 20.

29а. Как и на рис. 132, *б*, мы делим стороны квадрата на 4 части, но далее действуем в соответствии с

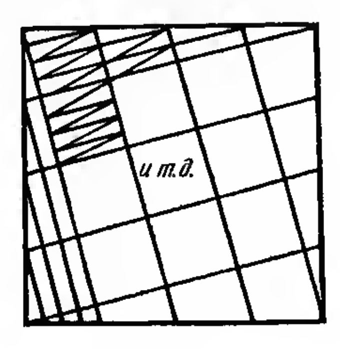


Рис. 133.

рис. 133, что приводит к 136 частям и новой последовательности, вывести общую формулу для числа частей в которой мы предоставляем читателю.

30. Речь идет о лестнице-стремянке. Если пара ее ножек хорошо упирается в какое-нибудь препятствие, расположенное в точке X (рис. 134, *а*), и если лестница стоит на очень гладком полу, а крючок вдруг перестанет ее удерживать, то другая пара ножек заскользит по полу и шарнир H опишет при этом четверть окружности с центром в точке X. Любая точка P, расположенная на ножке ниже H, опишет очень точно четверть эллипса, как показано на рис. 134, *а* [1].

[1] Мы можем пренебречь толщиной ножек, если возьмем P на прямой, соединяющей H с точкой соприкосновения ножки и пола. То, что ножки лестницы заканчиваются не точками, очень мало влияет на результат.

Одно из условий состояло в том, чтобы наше приспособление не касалось стены. Поскольку H описывает четверть окружности, ее свободная половина (не опирающаяся в X) движется так, как если бы она совпадала с нижней половиной вдвое более длинной приставной лестницы (на рис. 134, *а* отмеченной пунктиром), верхний конец которой скользит вниз по стене. На рис. 134, *б* схематически изображено скольжение

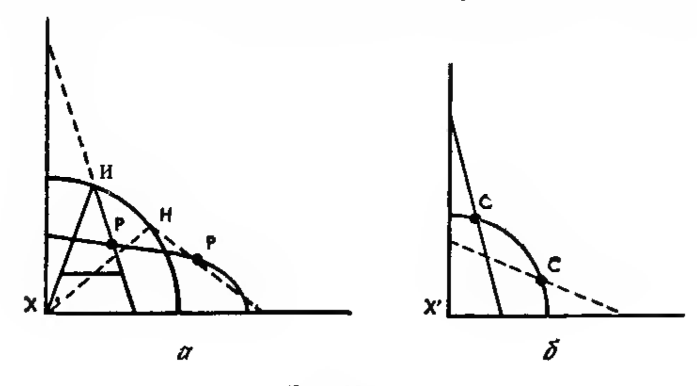


Рис. 134.

приставной лестницы по стене. Хорошо известно, что середина такой лестницы C описывает при этом четверть окружности, а любая *другая* ее точка, расположенная между ее вершиной и основанием, описывает четверть эллипса. Таким образом, все точки, подобные точке P на рис. 134, *а*, описывают четверть эллипса, даже если с помощью трюка со стремянкой мы и обошлись без стены.

31.

О снеге вспомнив все и о деревьях тоже,
Ответим: «Легкий бриз прошелся здесь, похоже».

Абсолютное безветрие оставило бы все на своих местах; а поскольку пихта не окружена другими вечнозелеными деревьями, на ее больших нижних ветвях тоже должен был бы лежать снег. Если бы налетел сильный ветер, то он сдул бы снег с ее верхушки даже скорее, чем с нижних ветвей. Когда снега выпало много, а ветерок дует легкими порывами, ситуация прямо противоположная. Легкие порывы сдуют немного снега (в ос-

новном с верхушки); но, поскольку сила ветра недостаточна, этот снег упадет на ветви, расположенные ниже, которые, не выдержав тяжести снега, в свою очередь уронят его на еще более низко расположенные ветви, и т. д. Произойдет нечто вроде цепной реакции, в результате которой самые нижние ветви останутся совсем без снега. (Теплое солнце могло бы вызвать тот же эффект. Однако, поскольку в условии задачи говорится о пасмурном небе, это объяснение отпадает.) Такое явление происходит повсеместно, но его редко кто замечает.

32. На рис. 135, *а* видно, что в двух точках наша петля имеет самопересечения. Это происходит потому,

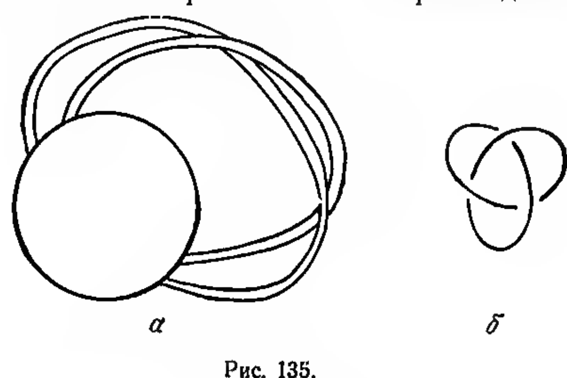


Рис. 135.

что в случае замкнутой петли простой узел всегда принимает форму трилистника (рис. 135, *б*). (Вспомним, что мистер М. не видел никакого узла.)

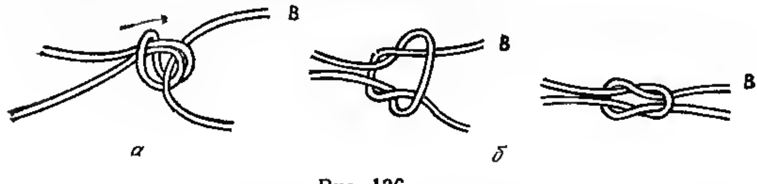


Рис. 136.

Во втором случае получается так называемый *квадратный узел*. Если исходную веревочную конфигурацию (рис. 136, *а*) затянуть и придать ей форму, изображен-

ную на рис. 136, *б*, то ответ становится очевидным, хотя догадаться о нем без веревки очень трудно. Попытайтесь сделать подобным способом «бабушкин узел».

33. Нужно выпить $33^1/_3$ чашки кофе. В самом деле, поскольку в данной партии кофе оставлено 3% кофеина, то в 100 чашках его будет содержаться столько же, сколько в трех чашках обычного кофе; а если 100 разделить на 3, то как раз и получится $33^1/_3$.

34. Еще примерно $11^1/_2$ человека. Забудем на минуту об объеме человека. Вспомним, что в литровый пакет вмещается 1 л воды и что 1 л воды весит 1 кг. Нам известно также, что человек ростом 1 м 66 см весит 80 кг. Поскольку высота человека (а значит, и сосуда) в 10 раз превышает высоту пакета, то при равных пропорциях объем сосуда в 1000 раз больше объема пакета и, следовательно, в него входит 1000 кг воды.

Поскольку плотность человека и воды примерно одинакова (вспомним, что мы можем держаться на воде, почти не двигаясь), мы приходим к выводу, что объем воды, наполняющей сосуд, превышает объем человека в $1000/80 = 12^1/_2$ раза. Значит, в сосуде поместятся $12^1/_2$ «растопленных людей», но, поскольку один человек уже имеется там, дополнительно туда можно будет поместить еще $11^1/_2$ человека.

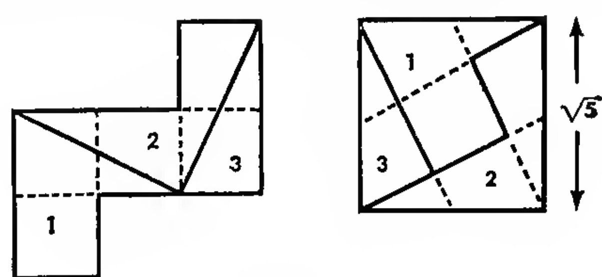


Рис. 137.

35. На рис. 137 показано, как следует провести эти 2 разреза. Гипотенуза треугольника *3* равна $\sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$. Можно заметить, что решение нашей задачи напоминает решение задачи 29.

36. Его объем равен $^1/_{27}$. Многогранником, двойственным к правильному тетраэдру, будет другой правильный тетраэдр, а значит, эти многогранннки подобны. Если мы вспомним, что в треугольнике точка пересечения меднан делит их в отношении 1 : 2, то найти решение будет нетрудно. Если у исходного тетраэдра треугольное основание расположено горнзонтально, то у двойственного к нему тетраэдра основанне тоже будет горизонтально. Следовательно, высота двойственного тетраэдра равна $^1/_3$ высоты исходного тетраэдра. В силу подобия заключаем, что объем двойственного тетраэдра равен $(^1/_3)^3 = {}^1/_{27}$.

37. Если мы спроектируем прямую на другую прямую, образующую с первой произвольный угол, то относительное расположение точек первой линии сохранится и после такого проектирования. Мы представим

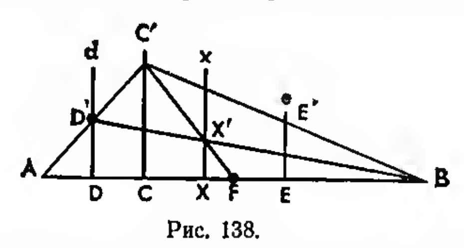


Рис. 138.

себе, что некоторый трегольник ABC' (рис. 138) ортогонально проектируется на паш отрезок AB так, что его вершина C' попадает в точку C. Тогда D, E и F — это проекции середин сторон треугольника ABC'. Следовательно, X' — точка пересечения меднан BD' и $C'F$, которая делит каждую из них в отношении 2 : 1. Значит, $BX = 2DX$. По тем же причинам $AX = 2EX$.

Тот факт, что нам известна лишь проекция точки X', но не сама эта точка, никак не влияет на доказательство. Поскольку перпендикуляры Dd и Xx параллельны, прямая BX' всегда пересечет Dd, причем $BX' = 2D'X'$. Аналогичным образом дело обстоит и с EX. При доказательстве нашего утверждения можно было бы и не приводить представленного здесь чертежа, дабы полностью удовлетворить требованиям, сформулированным в условии задачи.

38. На рис. 139 показано искомое тело.

В *следующей головоломке* три проекции даже не изображаются, но зато аккуратно описываются. Все три

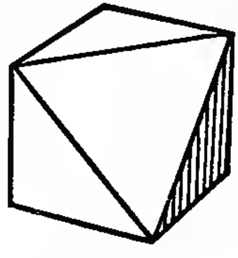


Рис. 139.

проекции представляют собой квадрат, разделенный двумя пересекающимися прямыми на 4 равных квадратика.

38а. На рис. 140, *а* изображен ромбододекаэдр, поставленный на одну из его шести вершин, в которых

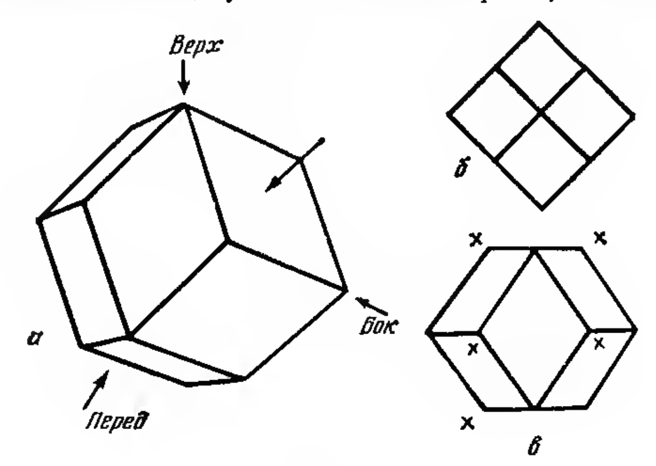


Рис. 140.

сходится по 4 ребра. Причина, по которой мы предпочли в условии не изображать проекции, а дать их словесное описание, состоит в том, что в каждом случае квадраты повернуты (рис. 140, *б*). Как показано на

рис. 140, *а*, если бы квадрат стоял прямо, это озиачало бы, что вид спереди сделан в иаправлении *A*, а вид справа сделан в направлении *B*. Однако сделанные в этих направлениях проекции не могут одновременно представлять собой разделенные квадраты, о которых говорится в условии. Например, проекция в направлении *B* приведена на рис. 140, *в*. (В вершинах, отмеченных буквой *x*, сходятся по 3 ребра.)

39. В кииге И. М. Яглома[1] приведена иитересная теорема, утверждающая, что если на сторонах *произвольного* треугольника построить равносторонние треугольники, то центры этих треугольников сами образуют новый равносторонний треугольник (рис. 141, *а*).

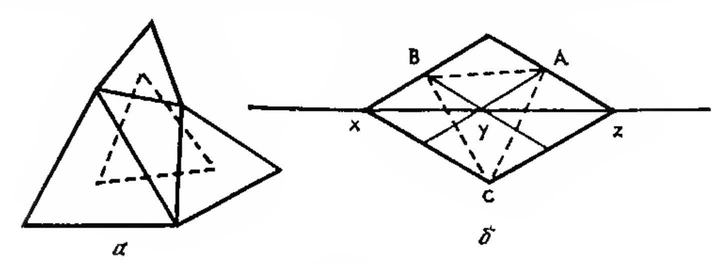


Рис. 141.

На рис. 141, *б* показана фотография. Если мы будем рассматривать горизонтальный отрезок *xz*, в который спроектировались осиовании наших пирамид, как вырожденный «треугольник» с вершинами *x*, *y* и *z* (или будем считать, что в задаче 37, что это «вид сбоку» иекоторого настоящего треугольника), то теорема для него также будет справедлива. Поскольку боковые грани образуют с горизоиталью углы в 30°, то вершины пирамид находится в цeитрах трех равносторонних треугольников с осиоваииями *xy*, *yz* и *xz*. Следовательно, *ABC* — равносторонний треугольник.

40. В правой части равеиства стоит число 1234567890. Поскольку числа, стоящие в зиаменателе, отличаются

[1] Яглом И. М. Геометрические преобразования. — М.: Гостехиздат 1955, задача 20а.

на 1, мы можем переписать наше равенство так:

$$\frac{1\,234\,567\,890}{n^2 - [(n-1)\times(n+1)]}.$$

Но

$$n^2 - [(n-1)\times(n+1)] = n^2 - (n^2 - 1) = 1,$$

поэтому вся дробь равна ее числителю. (Для решения этой задачи вполне достаточно 30 секунд.)

41. На могильном камне Джоан могла быть написана только одна из четырех дат: 1896, 1897, 1898 или 1899.

Допустим, например, что Джоан родилась 5 января 1897 г. и умерла в свой день рождения 5 января 1903 г. В этом случае она умерла в первый день своего седьмого года. Поскольку число 1900 кратно 100, 1900 г. не был високосным. Таким образом, она прожила ровно 6 лет по 365 дней в каждом, или всего 2190 дней. Если ее брат Джон родился 5 января 1903 г. и умер за день до своего дня рождения 4 января 1909 г., то смерть наступила в последний день его *шестого* года. Однако в течение жизни Джона было 2 високосных года — 1904 и 1908. Поэтому, хотя он жил 6 лет минус 1 день, два високосных года дали 2 дополнительных дня, и всего он прожил, следовательно, 2191 день, то есть на один день больше, чем Джоан. Для того чтобы этот кажущийся парадокс был возможен, нужно, чтобы Джоан родилась не раньше чем 1 марта 1896 г., поскольку число прожитых ею лет выражается одной цифрой.

42. Разрезы следует делать между цифрами серийных номеров. Уменьшение расстояний между разрезами либо приведет к тому, что придется склеивать левую половину одной цифры с правой половиной другой (заведомо негодный способ), либо (если купюры размещены так, что одинаковые цифры склеиваются с одинаковыми) возникнет повторение в конце серии новых номеров.

Единственная приемлемая стратегия состоит в том. чтобы убедиться, что у всех банкнот номера состоят из одинакового количества цифр, а если это не так, то разместить купюры таким образом, чтобы разрезы между цифрами пришлись на бумажки, стоящие вначале

(с меньшими номерами), ибо у купюр из этой группы после разрезания и склеивания число цифр в номере уменьшится на единицу и станут возможными повторения. Мы видим, что число цифр в номере у купюр из этой группы должно быть не меньше двух; в противном случае одна «прооперированная» банкнота останется без номера (рис. 142).

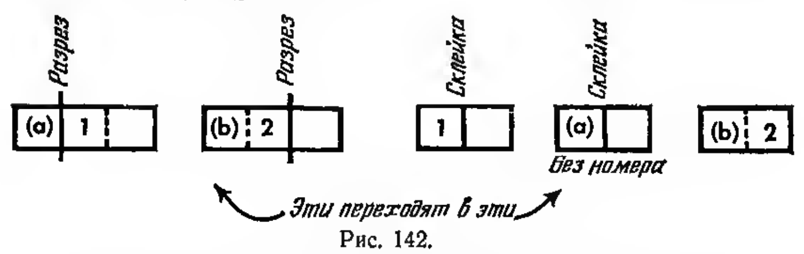


Рис. 142.

Если число цифр в номере превышает 9, то все становится более запутанным. (Читатель может поэкспериментировать с перенумерованными полосками бумаги.) Что касается номера новой купюры, то если под ней понимается нижняя (или последняя) купюра, он совпадет с номером последней «непрооперированной» купюры. В общем случае возникнет n новых и пропадет $n-1$ старый номер, где n — число цифр, между которыми проводились разрезы у исходных купюр.

43. Угол не меняется. Угол ABC (рис. 143), образованный касательной к окружности в точке B и радиусом CB, равен 90°; значит, в прямоугольном треугольнике ABC угол BAC равен 60°, а угол ACB — 30°.

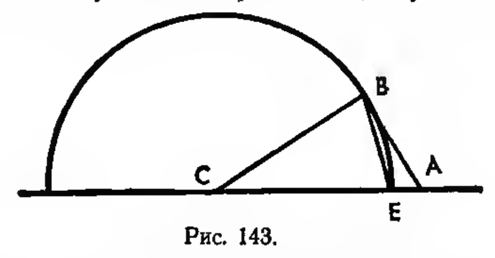


Рис. 143.

Поскольку CE и CB — радиусы, треугольник EBC равнобедренный и, следовательно, угол BEC неизменно равен 75°.

Все эти рассуждения можно провести и не прибегая к чертежу.

44. Прямая OP (рис. 144) перпендикулярна основанию. Для доказательства мы снова воспользуемся теоремой, использованной в головоломке 39, где речь шла о пирамидах и озере. Проведем прямые AO и BO под углом 30° к горизонтали HH. Построим под произвольным углом равносторонний треугольник Pxy, у которого две нижние вершины x и y находятся соответственно на AO и BO. Проведем прямую xx' параллельно BO, прямую yz — параллельно AO, а точку их пересечения обозначим через z. Проведем прямую ab через z параллельно HH. Соединим a и b с точкой P.

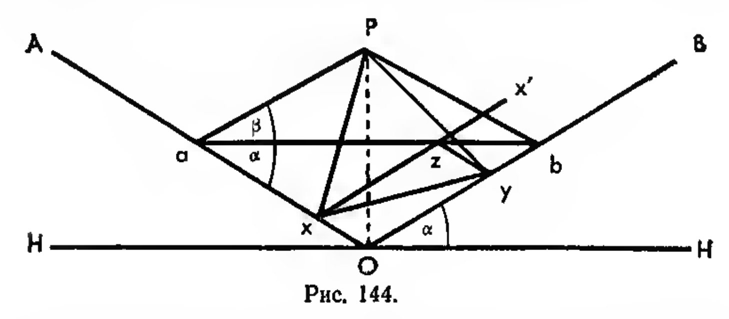


Рис. 144.

Мы можем теперь рассматривать azb как «боковую проекцию» треугольника, о которой шла речь в упомянутой выше теореме, и мы видим, что, поскольку $\alpha = 30°$, x и y — это центры равносторонних треугольников с основаниями az и bz. Из теоремы, обратной к упомянутой, следует, что точка P также обязана быть центром равностороннего треугольника с основанием ab. Следовательно, $\beta = 30°$. Таким образом, во всех случаях P лежит на прямой PO, перпендикулярной HH.

45. На рис. 145 показан способ, при котором сравниваются одинаковые пальцы. Суммарная длина мизинца и безымянного пальца на левой руке сравнивается с аналогичной длиной на правой руке. (Небольшая разница в длине на рисунке преувеличена для наглядности.) Но это сравнение показывает только, что $A + b < a + B$, и не позволяет определить, какой имен-

но из пальцев короткий. Далее следует аналогичным образом сравнить $B+c$ с $b+C$ и $C+d$ с $c+D$. Из этих трех сравнений можно установить, что A — короткий палец, независимо от того, в каком порядке производятся сравнения.

Если первым будет произведено сравнение, показанное на рис. 145, то затем останется сравнить только $B+c$ с $b+C$, и в результате мы определим, что A — короткий палец.

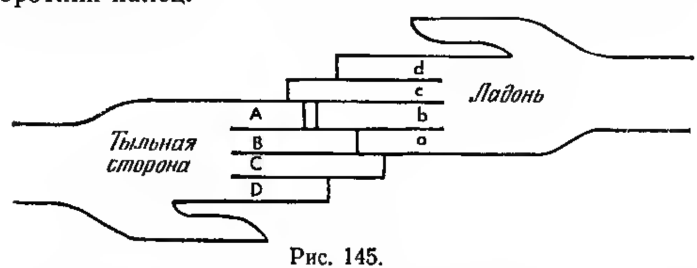


Рис. 145.

46. В доме окажется 63 галлона нефти, а не 60 галлонов, как оказалось бы, если бы мы подсчитали только количество топлива, находящееся выше самой высокой точки ввода в дом. Дело в том, что трубы действуют подобно сифону до тех пор, пока нефть не достигнет наинизшей точки D, находящейся вне дома. Таким образом, *вся* нефть из верхнего бака (50 галлонов) и из труб ($21+10{,}5+7{,}5=39$ м, что соответствует 13 галлонам) попадет в дом.

47. На рис. 146 средняя линия схематически изображает текст, напечатанный в одну строку, в котором концы параграфов отмечены точками. Расположение этих

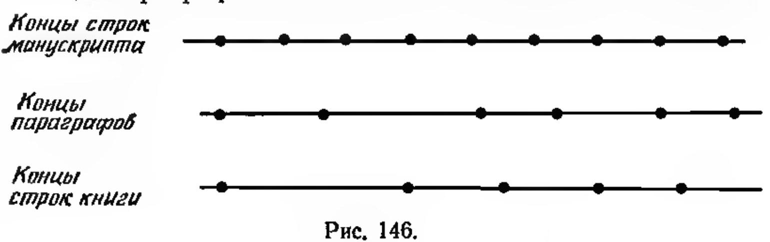


Рис. 146.

точек фиксировано. На верхней прямой точками отмечены идущие в правильном порядке концы полных строк

маиускрипта, а на нижней прямой — такие же концы строк в книге. Точки на верхней прямой расположеиы чаще, чем на нижней, поэтому вероятность их совпадения с точками средней прямой больше. Все характерные особенности нашей схемы преувеличены для наглядности.

48. Эта последовательность имеет вид

1, 4, 7, 6, 5, 6, 3, 6, 9, 0, 1, 6, 3, 6, 5, 6, 7, 4, 9, 0 ...,

причем далее все время повторяется выписанная группа из 20 цифр, а не из 10, как некоторые могли бы подумать. Выпишем сверху десять цифр (рис. 147). Под каждой из них выпишем последнюю цифру ее квадрата; например, $8 \times 8 = (6)4$. Затем умножим каждую

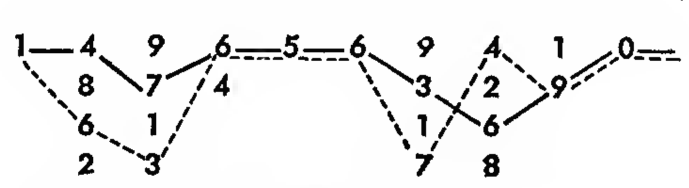


Рис. 147.

цифру во второй строке на соответствующую цифру в первой строке, и, если последняя цифра результата отличается от цифры, стоящей во второй строке, мы записываем ее иижe. Так, например, $3 \times 9 = (2)7$, однако под 1, 5, 6 и 0 (верхняя строка) мы оставляем пустое место, поскольку соответствующие последние цифры повторяются. Продолжим этот процесс до тех пор, пока результат не начнет циклически повторяться. При этом самые длинные столбцы, состоящие из четырех цифр, окажутся под 2, 3, 7 и 8. Теперь в каждом столбце мы находим последние цифры соответствующих степеней. Так, в случае 7 мы иаходим, что на 9 кончается вторая степень $(7 \times 7 = 49)$, иа 3 — третья, на 1 — четвертая, на 7 — пятая (повторение), затем вновь на 9 кончается шестая степень и на 3 седьмая, как раз та, которая нам нужна. Однако мы продолжим подобный подсчет и получим, что семнадцатая степень оканчивается на 7. Продолжая и дальше этот процесс (что

очень легко сделать в уме), мы обнаружим, что двадцать седьмая степень приведет нас опять к 3, и так будет происходить через каждые 10 шагов, причем 3 и 7 будут чередоваться. То же самое будет происходить и в столбцах, расположенных под 2, 3 и 8, в то время как в случае 4 и 9 мы все время будем попадать соответственно на 6 и 9. Сплошная линия показывает наш путь в первом круге, а пунктирная — во втором. Далее эти два круга повторяются, чередуясь, и приводят к указанной выше последовательности.

49. Для решения задачи воспользуемся следующими тремя теоремами.

1. *Площади подобных треугольников относятся, как квадраты сходственных сторон* (рис. 148, *а*).

2. *Квадрат длины касательной* $(AT)^2$, *проведенной из точки A к окружности* (рис. 148, *б*), *равен произведению длин* $(AB)\cdot(AC)$ *отрезков секущей, проведенной из точки A к той же окружности.*

3. *Квадрат длины* c^2 *перпендикуляра, опущенного из произвольной точки окружности на диаметр* (рис. 148, *в*), *равен произведению длин* $a\cdot b$ *отрезков, на которые основание перпендикуляра разбивает диаметр.*

Решение. На рис. 148, *а* $AF=AG=y$, и (по теореме 2) $(AF)\cdot(AE)=z^2$. Следовательно (вновь по теореме 2), пунктирная прямая, проведенная через точку F (рис. 149), отсекает от прямоугольника со сторонами AE и AG бóльшую часть, площадь которой равна z^2-y^2. Поскольку точка B разбивает отрезок FE на две равные части, $y\cdot(AB)=y^2+\frac{z^2-y^2}{2}$. Далее, по теореме 3 $(CA)\cdot(AB)=(AD)^2$. Поскольку $CA=y$, справедливо равенство $(CA)\cdot(AB)=y\cdot(AB)$; $AD=x$ (радиусы одного круга). Таким образом,

$$x^2=y^2+\frac{z^2-y^2}{2},$$

$$x^2-y^2=\frac{z^2-y^2}{2},$$

$$2x^2-2y^2=z^2-y^2,$$

$$2x^2=z^2+y^2,$$

$$x^2-y^2=z^2-x^2.$$

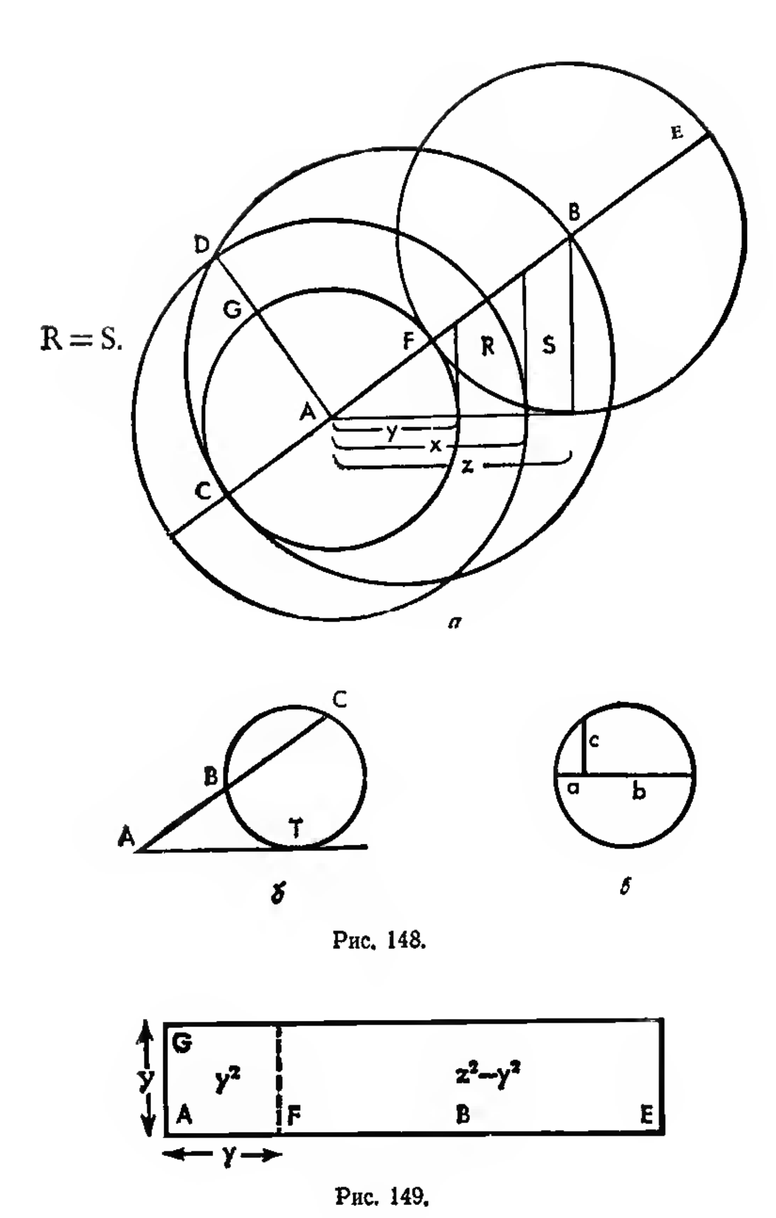


Рис. 148.

Рис. 149.

Но так как треугольники с основаниями x, y и z подобиы, то по теореме 1 $R = x^2 - y^2$, $S = z^2 - x^2$. Следовательно, трапеции R и S равновелики.

Специально для любителей строгости мы дадим более детальное обоснование последних двух утверждеиий. Треугольиики с основаниями x, y и z. Поэтому в силу теоремы 1

$$K : (K + R); \ (K + R + S) = y^2 : x^2 : z^2,$$

где K — площадь треугольника со стороной y. Составляя производные пропорции, мы получим

$$K : R : (R + S) = y^2 : (x^2 - y^2) : (z^2 - y^2)$$

и, наконец,

$$R : S = (x^2 - y^2) : (z^2 - x^2).$$

Следовательио, R и S равны.

50. Результат зависит не от того, где коичается разрез, а от того, как ои проходит. Одиосторонность листа Мёбиуса — вещь далеко ие такая простая, как это может показаться на первый взгляд. На его единственную

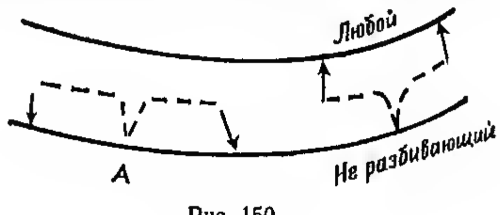


Рис. 150.

сторону можно смотреть в двух направлеииях точио так же, как и на числовую прямую. Если мы посмотрим на такую числовую ось с одной стороны, то числа будут возрастать слева направо, а если посмотрим на нее с другой стороны, то возрастать они будут справа налево. На рис. 150, где показаиа часть листа Мёбиуса, видно, что если разрез выходит из точки A и поворачивает налево, то для того, чтобы ои разбил лист иа две части, необходимо, чтобы он *вновь* повернул влево (то же самое верно, если разрез поворачнвает направо). Более общо: разрез должеи дважды повернуть в одну и ту же

сторону, если смотреть на лист *в одном и том же направлении*. Это направление изменится на противоположное, когда мы, двигаясь далее по краю, вернемся в исходную точку. Разрезы, не разбивающие лист Мёбиуса, должны сначала повернуть налево, а затем направо (или наоборот). Длина разреза не влияет на результат.

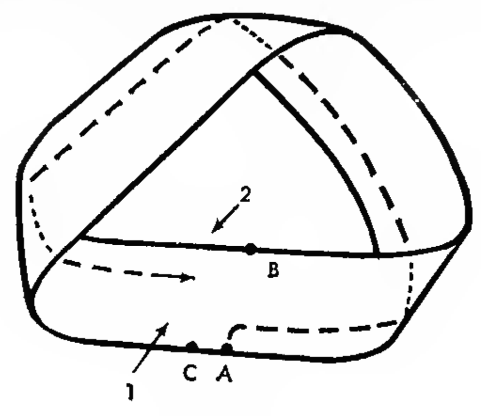


Рис. 151.

На рис. 151 видно, что если мы проследуем глазами вдоль разреза, то направление нашего взгляда (по которому мы судим о правых и левых поворотах) изменится с *1* на *2* и поворот направо с точки зрения этого изменившегося направления приведет разрез в *B*, в результате чего лист Мёбиуса разобьется на две части. Левый поворот привел бы разрез в точку *C* или даже в начальную точку *A*; при этом мы все равно получили бы только одну часть — длинную ленточку с разъединенными концами.

В приведенном выше правиле молчаливо предполагалось, что разрез состоит из трех прямолинейных (не содержащих поворотов) участков. Естественно возникает *следующая головоломка*, которую мы назовем 50a.

Приведите более общее правило, справедливое для любой несамопересекающейся кривой.

50a. На рис. 152, *a* лист Мёбиуса представлен в удобной форме: он укорочен и разрезан, но стрелки показывают, как именно следует соединить концы обра-

зовавшейся при этом полоски. Так, иапример, точку A, соответствующую концу одной из стрелок, следует соединить с точкой A', соответствующей *концу* другой стрелки; аиалогичио точку B следует соединить с B'. Можио сказать по-другому: концы полоски следует едииить, перекрутив ее предварительно на пол-оборота. Поэтому, если мы начнем разрез (отмеченный пуиктиром) в точке *1* и проведем его в точку *2*, то затем он продолжится (из-за перекручивания) в точке *3* и т. д.

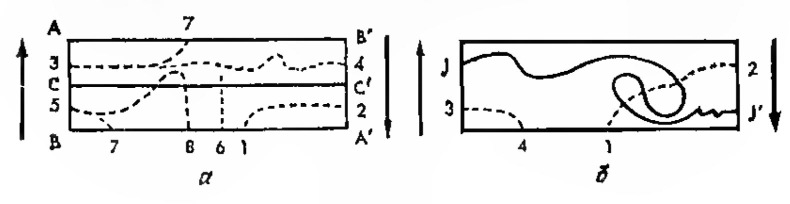


Рис. 152.

Быть может, кому-либо покажется, что, поскольку разрез, начинающийся в точке *1* и заканчивающийся в точке *6*, *пересекает* центральную лииию CC', лист Мёбиуса *не* разбивается иа две части; но если бы разрез не пересек центральной линии, отклонившись вместо этого в точку *7* или *7'*, то лист *разбился* бы на две части.

К иесчастью, если разрез кончается в точке *8*, то это правило к нему не применимо. Более того, зачем делать центральную лииию прямой?

В топологии в подобиых случаях удобно ссылаться иа жордаиову кривую: «простую» петлю, которая ие содержит самопересечений и делит поверхиость, иа которой оиа расположена, иа две отдельные области (при условии, что сама поверхность устроеиа иаподобие этой страиицы — без дыр и без иеобычиых соединений). Истинное и иаиболее общее правило, призванное замеиить то, которое было сформулировано выше, заключается в следующем. Если произвольная простая кривая JJ' (рис. 152, *б*) нарисована (сразу иа обеих сторонах полоски иаподобие разреза) так, что оиа иачииается в одном коице диаграммы, а закаичивается в точке, которая совместится с началом после того, как мы перекрутим и склеим концы полоски, представляя собой тем самым жордаиову кривую, совершающую *только один*

оборот, то любой поперечный разрез, пересекающий ее *нечетное число раз, не разбивает лист Мёбиуса на две части.* Наоборот, если такой разрез вовсе не пересечет эту линию или пересечет ее *четное число раз*, то он *разобьет* лист Мёбиуса на две части. На рис. 153 приведены примеры обоих случаев, причем ради наглядности мы взяли прямую линию, хотя форма ее несущественна, лишь бы она не касалась края листа (ср. с рис. 152, *б*).

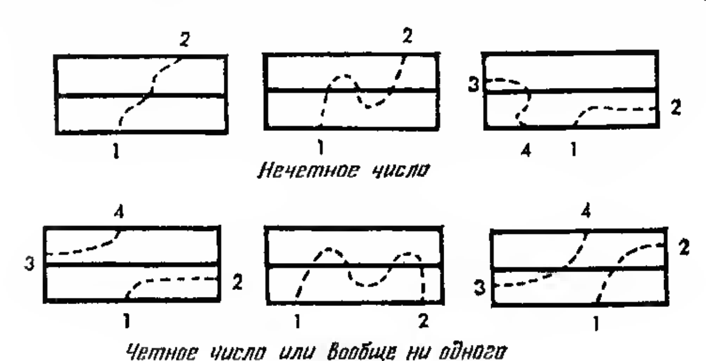


Рис. 153.

Заметим, что число поворотов разреза оказалось несущественным — важно лишь число пересечений разреза с некоторой фиксированной жордановой кривой. Доказательство этого утверждения потребовало бы привлечения теоремы Жордана и теории множеств — вещей слишком сложных, чтобы мы могли здесь на них останавливаться. Оно, однако, показывает, что, хотя у листа Мёбиуса край действительно один, тем не менее существует действительная, пусть подвижная и воображаемая, линия, которая в каком-то смысле отделяет этот край от самого себя. В качестве очень приблизительной аналогии можно было бы привести такой пример. Если вы отправляетесь на корабле из нью-йоркской гавани, пересекаете нечетное число раз Атлантический океан и заканчиваете свое путешествие снова в нью-йоркской гавани, то это означает, что либо вы совершили на своем корабле кругосветное путешествие и вернулись через Панамский канал (или обогнув мыс Горн), либо где-то путешествовали по воздуху.

51. Чертежник воспользовался теоремой о том, что центр тяжести треугольника отсекает от медианы третью часть. Он провел вертикальную прямую и отложил на ней с помощью своей полоски 3 равных прилегающих отрезка: AB, BC и CD (рис. 154). Затем из точки C как из центра он провел через точку A почти полную окружность, а также перпендикуляр EDF к прямой AD, пересекающий окружность в точках E и F. Потом он провел AE и AF и в результате получил равносторонний треугольник EAF.

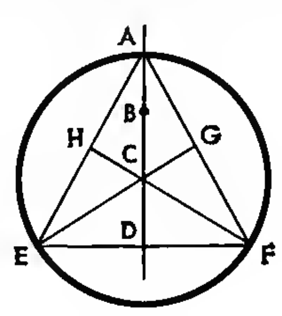


Рис. 154.

Доказательство. Проведем ECG и FCH. Поскольку AD — это часть диаметра, $DE = DF$; кроме того, $AC = 2(DC)$.

Следовательно, C — центр тяжести треугольника, а три прямые, проходящие через него, — это медианы, каждая длиною в $1^1/_2$ радиуса.

Таким образом, все медианы равны и, значит, треугольник — равносторонний.

Следующая головоломка, головоломка 51а, состоит в том, чтобы выяснить, как мог бы решить эту задачу человек, не знающий ни приведенной выше теоремы, ни квадратных корней.

51а. Точно так же, как и раньше.

Доказательство. Поскольку BD перпендикулярно AC и $AD = CD$, наш треугольник равнобедренный (рис. 155).

Следовательно, $AB = 2$.

Поскольку $\angle ABE$ опирается на диаметр, он равен 90°.

Поскольку $\angle BAE$ — общий угол $\triangle ABD$ и $\triangle ABE$, эти треугольники подобны.

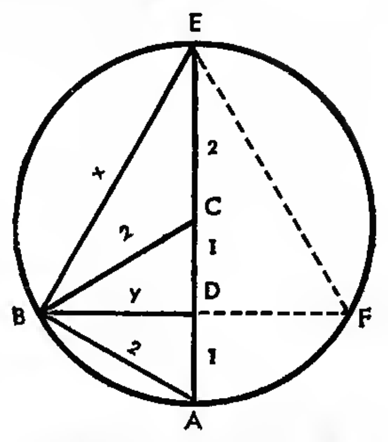


Рис. 155.

Гипотенуза AE треугольника ABE равна 4; гипотенуза AB треугольника ABD равна 2.

Следовательно, $x = 2y$. Значит, $x = BF = FE$.

52. Перед тем как соединить концы полоски, разметьте ее, как показано на рис. 156, где полоска для удобства укорочена. Пронумерованные точки делят

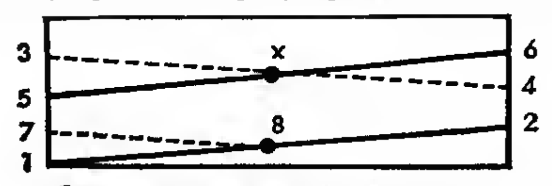


Рис. 156.

каждый из концов полоски на 4 равные части; линии, идущие с обратной стороны полоски, отмечены пунктиром. После того как мы соединим концы полоски, линия станет прямой и непрерывной. Разрез начинается

в точке *1* и далее соединяет точки в порядке их нумерации. После того как разрез, пройдя точку *5*, достигнет точки *x*, произойдет его самопересечение и лист раскроется, так что продолжать разрез придется по оставшейся части нашей линии. Поэтому кажется, что разрез не является непрерывным, хотя наша *линия была таковой.*

Когда разрез достигнет точки *8*, лист Мёбиуса распадется на две равновеликие части, что можно дока-

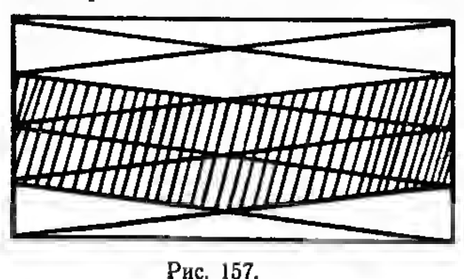


Рис. 157.

зать, сосчитав треугольники на рис. 157. Заштрихованная часть соответствует одному из кусков, а незаштрихованная — другому; каждая содержит по 8 треугольников одной площади (четверть некоторого прямоугольника).

53. Минимальное число красок равно 7. Мы, естественно, пренебрегаем продолговатыми и круглыми

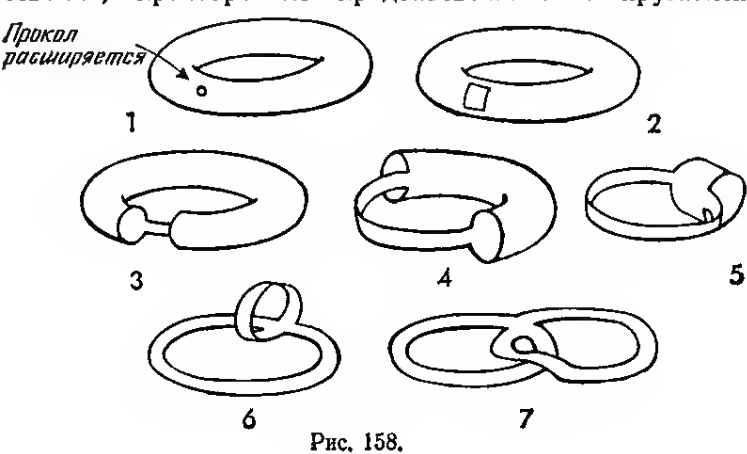


Рис. 158.

вкраплениями: они все являются своеобразными островками, и потому их можно покрасить любой краской, отличной от той, которой покрашена окружающая их полоска. Топологи обнаружат (рис. 158), что две дорожки в совокупности топологически эквивалентны (или гомеоморфны) тору (проколотому). Последний представляет собой поверхность обручального кольца или бублика, и про него известно, что на него можно нанести такую карту, для которой потребуется ровно семь красок, и ни для одной карты на торе не потребуется большего числа красок. На рис. 158 показано, как из проколотого тора (прокол, разумеется, не влияет на количество красок) можно постепенно сделать дорожки Хокусаи. Существуют и другие карты на торе, для которых требуется 7 красок.

54. Девочке следует провести два прямолинейных разреза, отсекающих от неразделенной половины пиццы соответственно $^1/_6$ и $^1/_3$ ее часть (рис. 159). Два маленьких кусочка следует добавить к двум четвертушкам пиццы; в результате каждый получит $^1/_4 + ^1/_{12} = ^4/_{12} = ^1/_3$ всего пирога.

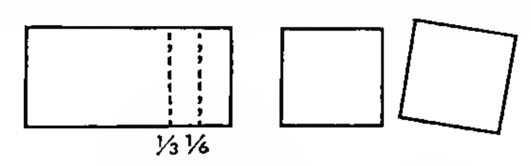


Рис. 159.

55. *B* — это карманное зеркальце, и стенографястка удаляется от человека, держа зеркальце прямо перед собой, так что первое отражение удаляется вместе с ней. Чертеж не нужен.

56. Число разрезов можно уменьшить до двух. Ключ к решению состоит в том, что если «крупные математики» доказали, что необходимо сделать 6 разрезов, то, вероятно, с их математикой все в порядке. Единственное, что осталось, поскольку задача, несмотря на существующие доказательства, ставится вновь,— это проана-

лизировать слова, с помощью которых формулировалась данная задача.

Однажды, когда известного ученого спросили, каким образом спириты могли заставить стучать дух сэра Оливера Лоджа, он ответил, что, когда нам показывают фокусы, неплохо понаблюдать за другой рукой фокусника, однако у себя в лаборатории ученые не заглядывают подозрительно под скамейку. Вполне вероятно, что и упомянутые выше математики восприняли условие таким, каким оно им показалось, а не таким буквальным, каким оно было сформулировано. Например, то, что части перекладываются «после любого разреза», не означает, что они *обязательно* должны перекладываться, ибо это требование становится бессмысленным после того, как мы сделаем последний разрез. Допустив это, мы можем сказать «после некоторого разреза или разрезов» и решить задачу, говоря, что мы перекладываем части после первого разреза и во время второго. Ничто в условии не запрещает нам так поступать, и там нет ограничений на число частей, распиливаемых за «один разрез».

До окончания первого разреза мы не можем перекладывать части, ибо имеется только одна часть; однако второй разрез проходит через 13 отдельных слоев (один из них в два раза толще остальных). Чтобы выполнить эту работу, не требуется какой-то специальной пилы: все слои лежат горизонтально на столе и продвигаются к полотну пилы. На рис. 160 показано, как следует перекладывать отпиленные куски во время второго разреза: попытайтесь, не глядя на рисунок, сами расположить нужным образом эти 13 слоев.

Последовательные перемещения частей показаны здесь в виде вертикального столбика; разрез идет вертикально, а помеченная буквами грань исходного куба, которая на рис. 160 смотрит на нас, на самом деле будет лежать на распилочном столе. Направляющая стенка, вдоль которой будут передвигаться части, расположится слева от столбика. По мере того как части отделяются (верхняя часть рис. 160), мы их подкладываем с другого конца (нижняя часть рис. 160), непрерывно надавливая столбиком на пилу. На рисунке все моменты представлены одновременно, а сбоку указано, на котором шаге осуществляется соответствующее расположе-

нне слоев. Шесть мест, где центральный 1-сантиметровый кубнк получает свон необходнмые 6 разрезов, показаны в левой колонке.

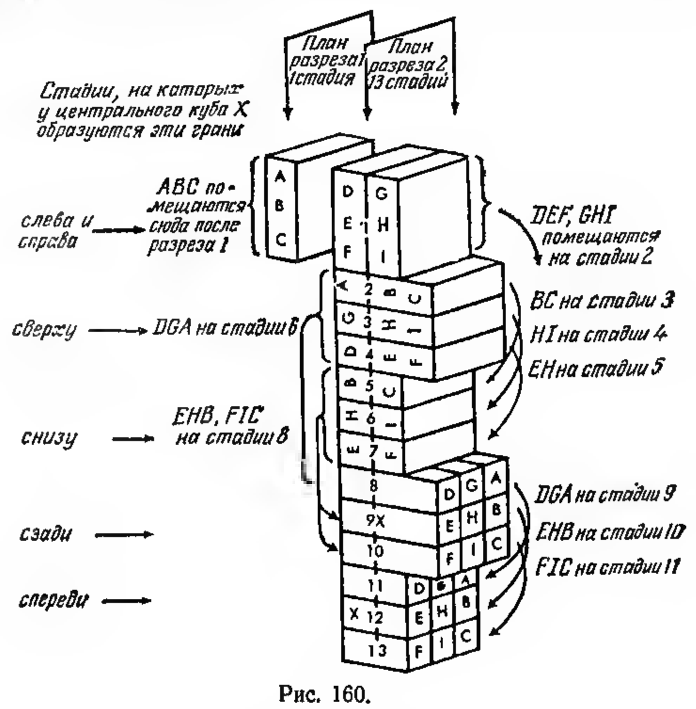


Рис. 160.

57. Расстоянне равно 12 см. Эксперт пришел бы в затрудиенне, отыскнвая уравненне кривой и определяя положеиия точки H с помощью дифференциального

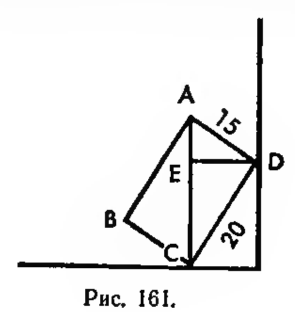


Рис. 161.

нсчисления; но если мы заметим, что наивысшее положение точка A (рис. 161) занимает в тот момент, когда диагональ AC расположена вертикально, то нам останется только найти расстояние от вершины D до гипотенузы прямоугольного треугольника ACD. Гипотенуза AC равна 25 см, ибо отношение катетов равно 3 : 4, а поскольку расстояние DE относится к AD, как AB к AC, мы находим

$$\frac{DE}{15}=\frac{20}{25}, \quad \text{нли} \quad DE=\frac{15\times 20}{25}=12.$$

58. На рис. 162, *а* показано, что B нужно перекрутить на пол-оборота против часовой стрелки и загнуть вверх. То же самое следует сделать с A и C, а затем

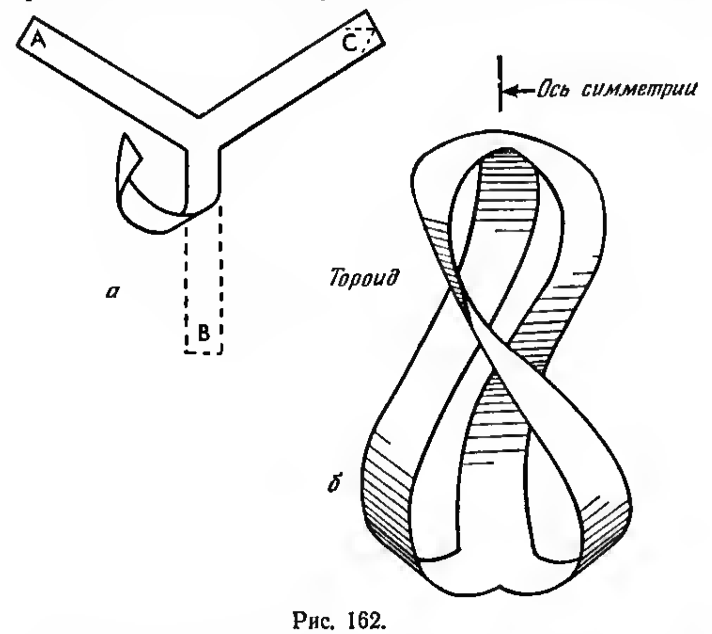


Рис. 162.

склеить эти три конца, что будет легче осуществить, если мы предварительно срежем уголок C, скажем, под углом 60°. Можно заметнть, что у полученной поверхности — две стороны н один край, соответствующий одному краю дыры; следовательно, у нашей поверхности — одна дыра. Если мы перережем любые два луча

из трех, то в результате останется одна часть, откуда следует, что число Бетти равно 2. На рис. 162, *б* изображен окончательный вид поверхности, которую мы по понятным причинам назовем *тороидом.*

Головоломка 58а (предназначена для топологов) состоит в том, чтобы выяснить, какие характеристики тороида отличаются от соответствующих характеристик тора.

Головоломка 58б заключается в следующем. На рис. 163 представлена карта, для правильной раскраски которой, если поместить эту карту на торе, требуется

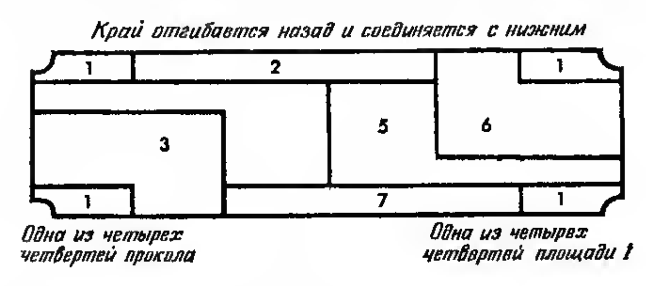


Рис. 163.

семь красок. Она изображена на плоскости и искажена так, чтобы ее можно было поместить на дорожках сада Хокусаи (см. головоломку 53). Расположите теперь ее на тороиде. Соедините верхний край с нижним, а затем склейте концы образовавшейся трубки. В результате образуется одна дыра, которая не влияет на карту.

58а. Край тороида образует узел в форме трилистника, который нельзя разместить на торе. Группа гомологий H_1 тороида отличается от аналогичной группы тора.

58б. Если мы попытаемся сразу решить задачу, то добьемся лишь того, что у нас разболится голова. К решению нужно подкрадываться исподволь, и сначала следует исказить тороид, пользуясь дорожками Хокусаи как проводником. Основная разница между дорожками и тороидом состоит в том, что у тороида есть два соединения, в каждом из которых «встречаются» по три

элемента, а у дорожек — одно соединение, где встречаются четыре элемента. На рис. 164 изображена небольшая деформация торонда: мы перемещаем нижнюю

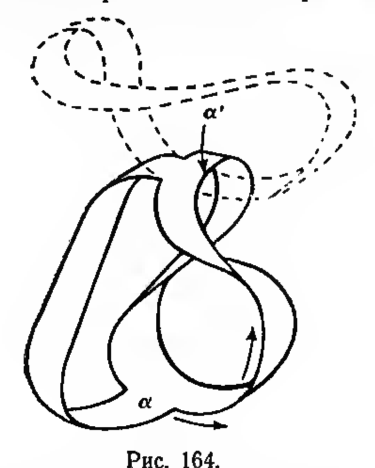


Рис. 164.

часть левой петли a вверх и вдоль края, как показано стрелками, до тех пор, пока она не займет положе-

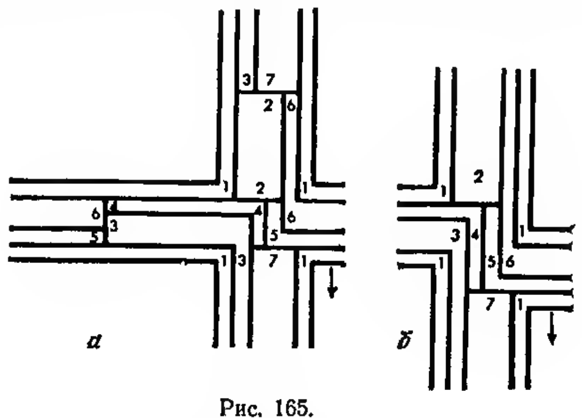


Рис. 165.

ние a', причем новое положение петли изображено пунктиром. Теперь мы получили поверхность, подобную дорожкам Хокусаи, только с перекрученными петлями. Но поскольку петли перекручены дважды и, следова-

тельно, сохраняют свою двусторонность, мы, размещая карту, можем пренебречь этнмн перекручиваниямн. На рис. 165, *а* нзображено новое соединенне четырех элементов с картой, расположениой на нем, как на дорожках Хокусаи. На рис. 165, *б* н 166, *а* показано, какнм

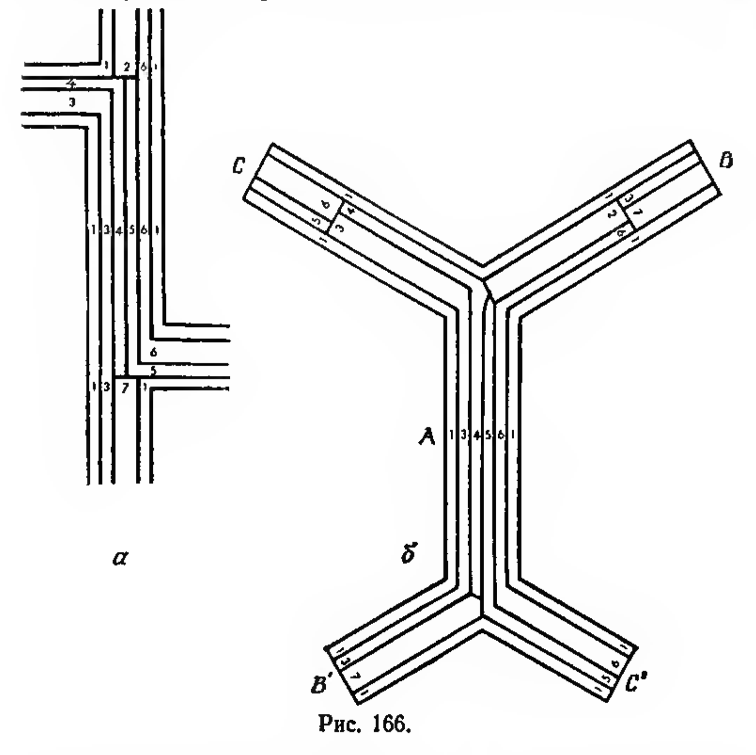


Рис. 166.

образом растягиваются полоски на карте по мере деформации соединения. На рис. 166, *б* вы вндnте, как выглядит карта на моднфицированной моделн торонда, где восстановлены соеднненuя нз трех элементов, расположенных под равными углами. *A* перекручнвается на пол-оборота, благодаря чему, когда мы соедnним *C* с *C′* н *B* с *B′*, онн тоже перекрутятся на полоборота.

59. Рнсунок никогда не начнет повторяться в том смысле, что всю бесконечную таблнцу нельзя разбить

на квадраты некоторого коиечного размера, у каждого из которых рисунок был бы одинаков. Треугольиики, составлеиные из единиц, идут вдоль диагонали (рис. 167), каждый раз увеличиваясь почти вдвое [их основания на единицу меньше последовательных степеней двойки: (1), 3, 7, 15, 31, ... и т. д.]. Другая особенность, на которую читателю следует обратить внимание, состоит

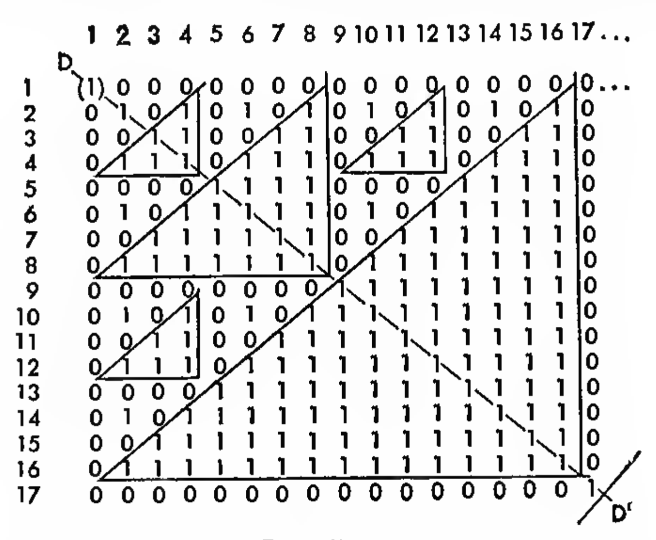


Рис. 167.

в том, что весь рисунок симметричен относительно диагонали DD'. Имеиио благодаря этой симметрии весь рисунок иельзя разбить иа повторяющиеся квадраты.

Под строкой мы понимаем горизонтальное расположение символов, а под столбцом — их вертикальное расположение; символ (5, 3) означает элемент, стоящий иа пересечении третьей строки и пятого столбца (пятый элемент третьей строки). Допустим, что заполнили первые четыре строки и столбца. Когда мы продолжим заполнение пятой строки, то заметим, что ее первые четыре элемента — все нули, и то же верно относительно пятого столбца. В силу симметрии элемеитом (5, 5) окажется 1, и по аналогичной причине, если мы возьмем правый нижиий угол любого из последовательных треугольников на DD', на следующем месте в следующей

строке будет обязательно стоять 1. Таким образом, вся диагональ DD' состоит из единиц, и поэтому первая строка или столбец (сплошь состоящие из нулей) никогда не смогут повториться.

Головоломка 59а состоит в том, чтобы выяснить, можно ли получить повторяющийся рисунок, если мы выберем другую первую строку [1].

59а. (На приведенных ниже рисунках, если мы вычислясм повторяющиеся последоьательности в обратном порядке, единица вначале допускается.)

Действуя наугад, если нам повезет, мы можем обнаружить, что строка и столбец, составленные из единиц,

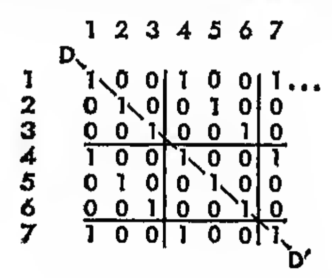


Рис. 168.

за каждой из которых следует по два нуля, приводят к бесконечно повторяющемуся расположению (рис. 168), составленному из одинаковых квадратов размером 3×3. Если мы захотим проанализировать, по какой причине сплошные нули в первой строке и столбце породили неповторяющийся, но расширяющийся рисунок, то нам придется остановиться, дабы обдумать, почему *одинаковое* (хотя и произвольное) расположение символов как в первой строке, так и в первом столбце приводит к симметрии относительно диагонали DD'.

На рис. 169, *а* мы обозначили буквой X элементы (2, 1) и (1, 2): в силу нашего правила эти элементы совпадают, так что, какими бы они ни были, элемент (2, 2) всегда есть 1. Точно так же, поскольку элементы (3, 1) и (1, 3) одинаковы, они одновременно будут согласовываться или не согласовываться с элементом

[1] Исключая тривиальный случай сплошных единиц.

(2, 2), с которым мы их сравнннваем. Следовательно, элемеиты (3, 2) и (2, 3) совпадают, а элемент (3, 3) равен 1. Так будет продолжаться и дальше, в результате чего n-я строка окажется такой же, как и n-й столбец, а на месте нх пересечения (на диагоналн DD') всегда

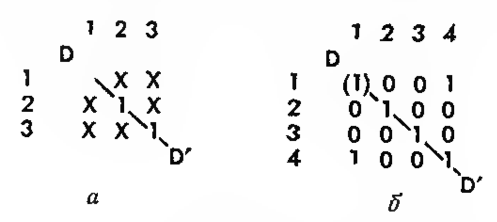


Рис. 169.

будет стоять 1. В случае, прнведенном на рис. 168, прнсутствне еднинц в (4, 1) и (1, 4) предотвращает образоваине трех 1 в четвертой строке н четвертом столбце (рнс. 169, *б*), и вместо этого мы получаем *точное повторение* первой строкн и первого столбца.

Рассмотрим треугольннк, состоящий нз единиц, основанне которого расположено на строке 8 таблицы, приведенной в решенни задачн 59. На рнс. 170 изображеиа

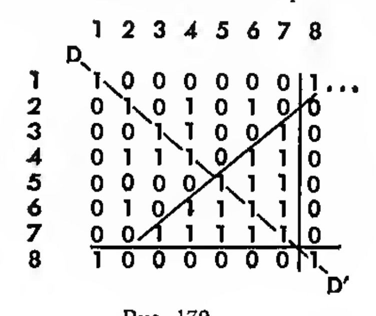


Рис. 170.

его часть, отрезаемая строкой 7 н столбцом 7. На нсходном рнсунке следующнй 0 в первом столбце прнводит к ннжнему ряду еднннц, который затем сменяется рядом нз нулей *из-за следующего нуля, стоящего в первом столбце*. Мы теперь поставим вместо элемента (1, 8) еднннцу; в результате нензбежная 1 на днагоиалн DD' будет соответствовать едииице, которую мы

вставили в нашн измененные последовательности,— мы должны были поставить 1 и на место (8, 1) — и новые строка 8 и столбец 8 окажутся точными повторениями строки 1 н столбца 1. В результате весь рисунок окажется составленным из бесконечно повторяющнхся квадратов размером 7×7. Тот же самый маневр можно было бы проделать и на основе любого другого треугольиика, расположениого на DD'; в результате повторяющнйся квадрат оказался бы просто больше размером. Отсюда мы выводнм, что любая исходиая последовательиость, составленная из единнц, за каждой из которой следует $2^n - 2$ нуля, прнводит к потворяющимся квадратам.

В *головоломке 59б* требуется выяснить, какие другие повторяющнеся рисуики, которые бы не соответствовали, однако, формуле $(2^n - 2)$, можно было бы получить таким методом.

59б. Кроме последовательностей, составленных по указанной формуле, каждая последовательность, образованная с помощью части строки (или столбца), расположенной внутри повторяющегося квадрата, прнведет к тому же самому повторяющемуся рисунку, при условии что мы начнем его на диагонали DD'. Например, рис. 171 повторяет рис. 170. Если мы возьмем строку 2 и начнем с 1, расположенной в пункте (2, 2), то получим повторяющуюся последовательность 1010100 ..., которая вместе с такнм же столбцом приведет, очевидно, к тому же самому повторяющемуся расположению, от которого просто «отрезаны» первая строка и первый столбец.

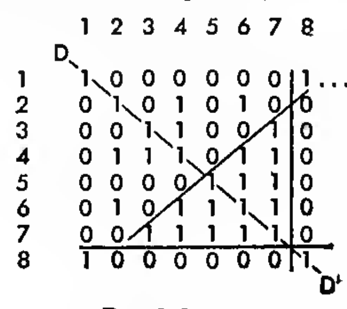


Рис. 171.

То же самое произойдет и с другими пятью последовательностями, расположенными внутри данного квадрата. Например, если мы возьмем строку 6 и начнем с диагонали DD', то придем к потворяющейся последовательности 1101011 ... .

В следующем, большем треугольнике, основание которого расположено на 15 строке (измененной аналогичным образом, дабы получилось повторение), мы можем взять другое, большее множество внутренних последовательностей и т. д. *до бесконечности*.

Мы не собираемся заниматься здесь асимметричными расположениями: читатель может самостоятельно поэкспериментировать с ними — они ужасно раздражают. Например, если мы составим первую строку из повторений группы снмволов 10 (101010 ...), а первый столбец составим из повторений 100 (100100100...), то рисунок станет асимметричным уже в первых трех квадратах размером 3×3. (*Предостережение*: всего лишь *одна* ошибка безнадежно испортит весь рисунок.)

Головоломка 59в: если мы назовем метод, которым здесь пользовались, «дедуктивным», то что можно сделвть «индуктивным» методом? В частности, что можно узнать о расположении, приведенном в решении головоломки 59, *с помощью индукции?*

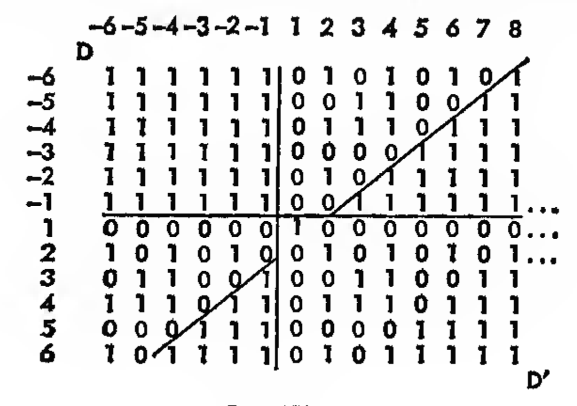
59в. «Индуктивно» в нашем случае означает «двигаясь в обратном направлении»; следовательно, наше правило становится таким: элемент, расположенный над 1, совпадает с элементом, расположенным слева от 1, а элемент над 0 отличен от элемента, расположенного слева от 0. Согласно этому правилу, строка из нулей приводит к расположенной над ней строке из единиц; но если мы хотим продолжить однимн нулями первую строку и первый столбец соответственно назад и вверх, то мы вынуждены поместить 1 в положение (1, 1) — иначе ничего не получится. На рис. 172 показано, что происходит, когда мы продолжаем первый столбец вверх при условии, что в положении (1, 1) находится 0,— слева образуется сплошной блок, составленный из одних единиц, и мы не можем продолжить влево нулямн первую строку. На рис. 173 мы видим, что получится при правнльном расположении элементов: ясно, что в (—1)-строке, начнная с элемента (3, —1), идут сплош-

ные едииицы. Затем в (—2)-й строке, иа один шаг вправо, начинается еще одна бесконечная последовательность единиц. Мы видим, что здесь начинается бескоиечный треугольник, составленный из единиц. То же

	-3	-2	-1	1	2	3
-3	1	1	1	0	1	0
-2	1	1	1	0	0	1
-1	1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	0	0	0
2	1	1	1	0	1	0
3	1	1	1	0	0	1

Рис. 172.

самое происходит и в левом иижнем квадрате. Встав иа довольио необычную точку зрения, мы можем представить себе, что левый верхиий квадрат — это иижиий правый угол того предельного (отвечающего стремлению к бесконечности) треугольиика, к которому стреми-



D	−6	−5	−4	−3	−2	−1	1	2	3	4	5	6	7	8	
−6	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	
−5	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	
−4	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	
−3	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	
−2	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	
−1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	...
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	...
2	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	...
3	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	
4	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	
5	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	
6	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	D′

Рис. 173.

лись треугольники, составленные из единиц и расположенные вдоль диагонали на нашем исходном рис. 167.

Следующий вопрос составляет содержание *головоломки 59г*. Сначала сделаем намек (для читателей, менее искушенных в математике): если продолжить рис. 167 до бесконечности, то какую долю от всех элементов составят едииицы? Мы можем рассмотреть по-

следовательность квадратов: в первом квадрате размером 2×2 из 4 элементов 2 составляют единицы; в квадрате размером 4×4 из 16 элементов 8 составляют единицы; затем из 64 элементов 38 составляют единицы; далее из 256—176 и т. д. Такая последовательность выглядит довольно отталкивающей, поэтому не удастся ли нам определить на нашей геометрической модели, какую часть всей *площади* занимают единицы?

59г. Единицы занимают 100 % всей площади. Мы пренебрежем на минутку последовательностью и нарисуем чертеж таким, как если бы мы его увидели, взгля-

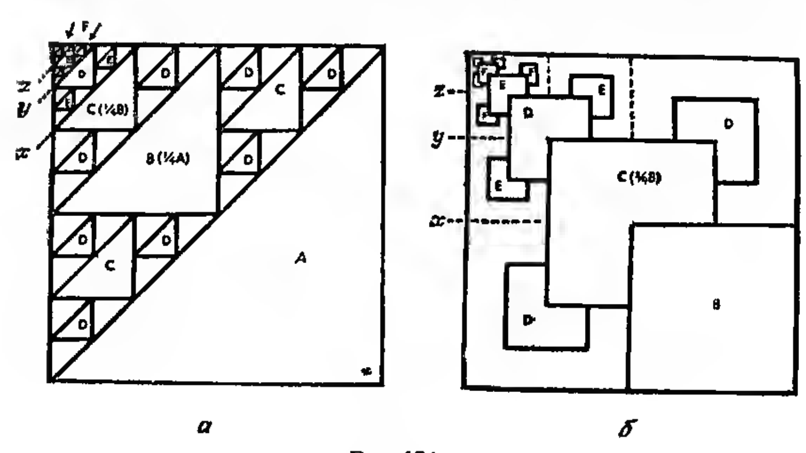


Рис. 174.

нув в телескоп не с той стороны, и будем рассматривать бесконечность как fait accompli[1]. На рис. 174, *а* *А* — это предельный треугольник в бесконечности, *В* — «предыдущий» треугольник и т. д., и мы представим себе, что наш рисунок заполняется в обратном порядке по сравнению с тем, как мы это делали раньше, то есть идя, так сказать, от наибольшего бесконечного треугольника ко все меньшим треугольникам (мы показали на рисунке, как все больше и больше треугольников заполняет левый верхний угол). На рис. 174, *б* показана геометрическая аналогия данной ситуации, но

[1] Как нечто завершенное (*фр.*).

площадн удвоены и областн сделаны квадратными: *A* показано не полностью справа и соответствует большому треугольнику *A* на рис. 174, *а*; *B* на рис. 174, *б* составляет по размерам $^1/_4$ *A* и т. д. Можно заметить, что последовательные квадраты (в данном случае нам не нужно ими всеми заполнять *A*) соответствуют следующему правилу пропорциональности: 3 площади *D* на рис. 174, *б* пропорциональны 9 площадям *D* на рис. 174, *а*.

Не требуется слишком большой математической проницательности, дабы понять, что сумма ряда $1 + {}^1/_2 + {}^1/_4 + {}^1/_8 + \ldots$ равна 2, если мы представим себе, что мы отошли на два шага от стены, затем сделали шаг обратно к стене, затем — полшага от стены и т. д. (все время проходя половину предыдущего расстояния) бесконечное число раз. Ясно, что подобный «ахиллесов» процесс[1] приведет нас в точку, находящуюся на расстоянии двух шагов от стены. Можно заметить, что это же применимо и к нашему процессу, при котором постоянно уменьшающиеся квадраты (рис. 174, *б*) стремятся заполнить пределы содержащих их квадратов, отмеченных пунктиром,— *x*, *y*, *z* и т. д. В бесконечности все пространство будет заполнено квадратами, отмеченными буквами, и, следовательно, вся площадь на рис. 174, *а* будет заполнена треугольниками, состоящими из единиц.

Хотя и верно, что нулей в нашей таблице бесконечно много, отношение общего числа единиц к общему числу нулей, выраженное в терминах площадей, таково же, как отношение площади внутренности квадрата к площади его сторон: вся площадь занята внутренностью квадрата. Если кто-нибудь более искушенный в математике станет придираться к этому рассуждению, напомните ему головоломку 20, а если он и тогда не успокоится, упомяните вскользь о канторовых множествах и удалитесь с достоинством.

60. Ни одна из сфер не уйдет вперед.

Действительно, поскольку скольжение между нашими сферами отсутствует, мы можем представить себе

[1] Автор намекает здесь на известный парадокс Зенона: догонит ли Ахиллес черепаху? — *Прим. перев.*

лист бумаги s (рис. 175), который расположен между ними и движется влево. Когда s передвигается на x см, центр a нижнего шара передвигается на $^1/_2\ x$ в том же направлении. Это же замечание справедливо и для центра b верхнего шара; таким образом, точки a и b оста-

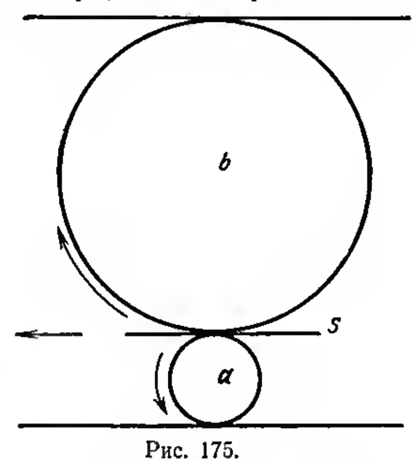


Рис. 175.

ются все время на одной вертикали независимо от направления, в котором перемещаются сферы.

61. Наиболее близким к истине оказался чудак.

Объем цилиндра равен $\pi R^2 h$ где R — радиус основания, а h — высота. Если мы примем радиус R основания

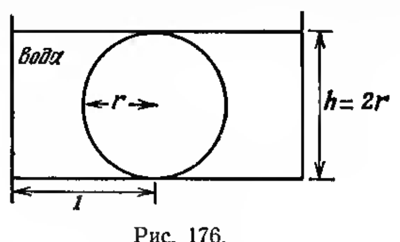


Рис. 176.

за 1, то объем части цилиндр, расположенной под водой, окажется равным πh. Обозначим теперь радиус яйца через r, тогда, поскольку диаметр яйца равен h, объем «подводной» части цилиндра выразится как $2\pi r$ (рис. 176). Объем шара равен $^4/_3\pi r^3$. Следовательно,

объем воды V равен $2\pi r - {}^4/_3\pi r^3$. Чтобы найти значение r, при котором этот объем максимален, нам пришлось бы воспользоваться дифференциальным исчислением; однако вопрос-то состоял в том, кто из приятелей был ближе к истине. Разделим обе части равенства на 2π:

$$\frac{V}{2\pi} = r - \frac{2}{3} r^3.$$

Отсюда видно, что для определения нужной величины r нам не требуется знать величину π. Следовательно, ответ не зависит от π, и более точный ответ дал тот из приятелей, у которого была более точная линейка, поскольку его измерения кастрюли были точнее, иными словами, наш чудак.

62. I. Если мы развернем боковую поверхность конуса на плоскость, то искомая кривая совпадет с полуокружностью радиуса 1, построенной на отрезке PA как на диаметре.

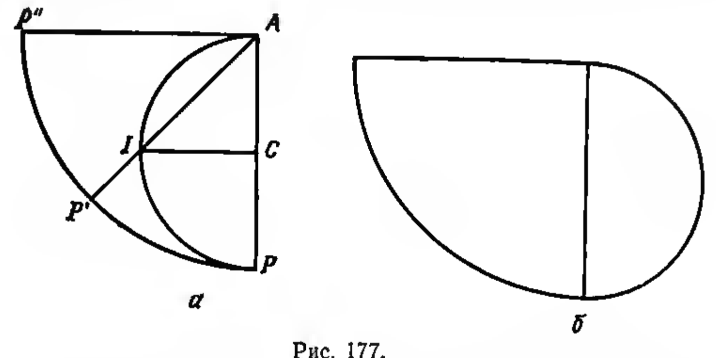


Рис. 177.

Поскольку диаметр основания конуса равен 1, а $PA = 2 =$ длине образующей конуса, периметр основания $= \pi$ — одной четверти длины окружности радиуса 2. Следовательно, развертка нашего конуса представляет собой четверть круга.

На рис. 177, *а* точка P'' совпадет с P после того, как мы свернем конус, а точка C — это центр полукруга PIA. Полуокружность PIA удовлетворяет всем требованиям, ибо она касается основания $P''P'P$ в точке P, ка-

сается образующей $P''A$ в точке A и пересекается с образующей $P'A$ в точке I, где она делится пополам, причем пересечение происходит под углом в 45°, так как IC перпендикулярно PA, и, значит, $P'A$ — биссектриса угла $\angle P''AP$.

Чтобы сделать нужную модель, лучше построить полукруг с диаметром PA вне развертки (рис. 177, *б*) и вырезать всю фигуру целиком из одного куска бумаги. Когда вы, свернув предварительно конус, прижмете к нему торчащий сбоку полукруг, край полукруга как раз и пройдет по искомой кривой.

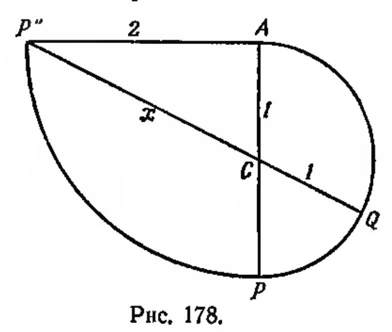


Рис. 178.

II. Что касается ответа на второй вопрос, то отношение наибольшего поперечного размера нашей модели к ее наименьшему размеру[1] равно φ.

Отрезок $P''Q$ будет наибольшим, если он пройдет через точку C, центр полукруга AQP (рис. 178), а отрезок AP — это наименьший поперечный размер нашей модели.

$$\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2};$$

$$x^2 = 2^2 + 1, \quad \text{значит}, \quad x = \sqrt{5};$$

$$P''Q = \sqrt{5} + 1, \quad AP = 2;$$

$$\frac{P''Q}{AP} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \varphi.$$

[1] Или, как говорят математики, отношение диаметра нашей модели к ее ширине, где под *диаметром*, соответственно *шириной*, понимается толщина самой широкой, соответственно самой узкой, полосы, в которую можно «засунуть» модель так, чтобы она соприкасалась с обоими краями полосы. — *Прим. ред.*

63. Высота $h = 2$ футам.

На рис. 179 вертикальиые прямые l огранничивают тот «коридор» шириной 2 фута, в котором мы только и можем действовать. Красиый квадрат R помещен для удобства сбоку. Поскольку R во всяком случае квадрат, то его свободиый угол должеи располагаться иа прямой,

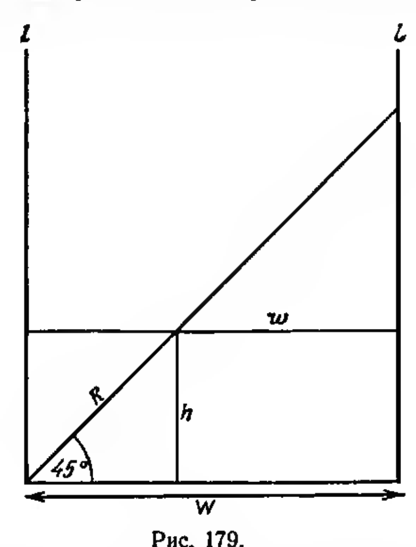


Рис. 179.

проведенной под углом в 45° к основанню. Площадь правого прямоугольннка с высотой h и шнриной w равна суммарной площади белых полос. Изменим масштаб так, чтобы было $W = 2$.

Если $h = w = 1$, то площадь белых полос равиа 1. Если h и w разнятся между собой иа величииу $2n$, то искомая площадь $= (1 + n) \cdot (1 - n) = 1 - n^2$, что меиьше 1. Следовательио, эта площадь будет максимальиой, когда h станет равиой 2 футам в исходном масштабе.

64. 1. Получится плоскяй полый квадрат (2 стороиы, 2 края, ни одиого перекручиваиия). Четыре угла в точке самопересеченяя исходной пуиктирной линии превратятся после разрезаиия в четыре угла квадрата, а перекручиваиня, так сказать, «самораскрутятся», но, для

того чтобы это понять, потребуется, вероятно, дар ясновидения.

II. Указанное перемещение никоим образом не повлияет на результат. Как бы далеко мы ни передвинули часть y, длина каждого из полученных в итоге краев останется неизменной и способ, с помощью которого все части соединены друг с другом, также не изменится.

65. Служанка сказала:

— *Посмотрите-ка*! Вы оставили часть крошек в середине!

Дело в том, что дворецкий не дотянулся до участка X, половина которого изображена на рис. 180. Он не достал до пунктирной прямой потому, что, двигаясь вдоль

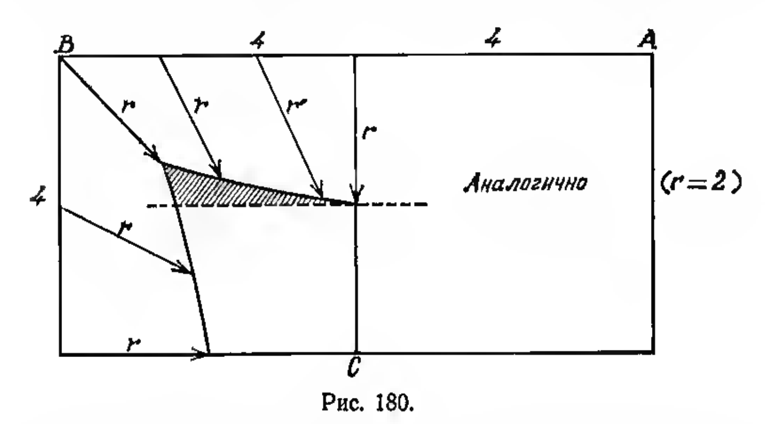


Рис. 180.

стороны AB, сметал крошки не перпендикулярно AB, как ему следовало бы сделать, а в направлении к C (отмечено стрелками) на постоянное расстояние r. Так что служанке пришлось вытирать после него участок X.

66. Я нашел будильник, который был поставлен на 6 часов, в то время как мы всегда ставили его на 7 часов. (Дело происходнло осенью.) Значит, будильник был переведен на час назад.

67. Получатся две петли, не сцепленные друг с другом, причем одна из них, R, окажется закрученной вправо (рис. 181, a), а другая, L,— влево.

Дело в том, что сделать несамопересекающуюся петлю можно двумя способами: либо закручивая полоску вправо, либо закручивая ее влево. (Обе петли, R и L, не меняют своего вида, если мы перевернем их «вверх ногами» или посмотрим на них с обратной сто-

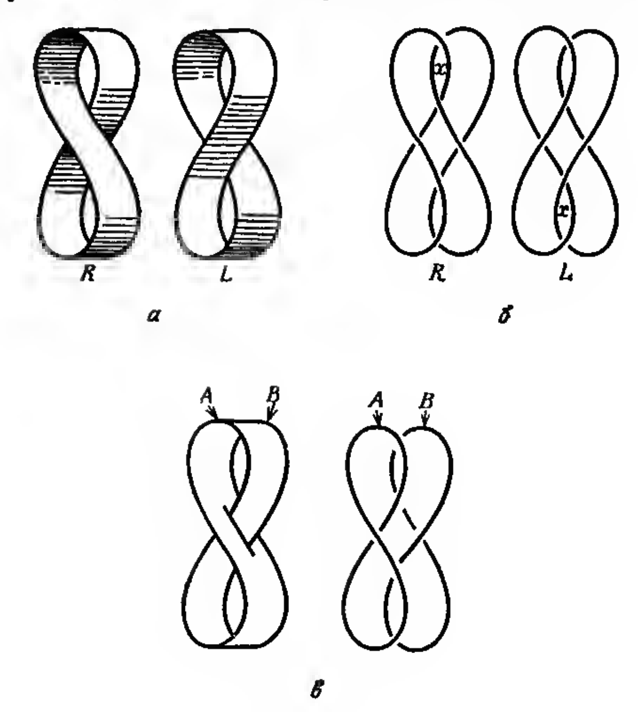


Рис. 181.

роны.) Чтобы разобраться в различии этих петель, рассмотрим их края.

Если мы разрежем любую из петель вдоль по центру и представим себе, что оставшиеся половинки настолько сужены, что напоминают не поверхности, а линии, то при этом мы получим конфигурации, изображенные на рис. 181, *б*. Вы видите, что фигуры, напоминающие восьмерки, закручены в одну сторону и, кроме того, сцеплены друг с другом на участке X. Если же мы проделаем аналогичную процедуру с петлей, заданной в условии,

которая пропущена через разрез, то в результате получатся две несцепленные восьмерки, закрученные в разные стороны (рис. 181, *в*). Заметим, что фигуры R и L получаются друг из друга зеркальным отражением.

68. Фигура A окажется перекрученной на 4 пол-оборота и не имеющей ни одного узла; у фигуры B будет 8 пол-оборотов и 1 узел. Чтобы убедиться в этом, вновь

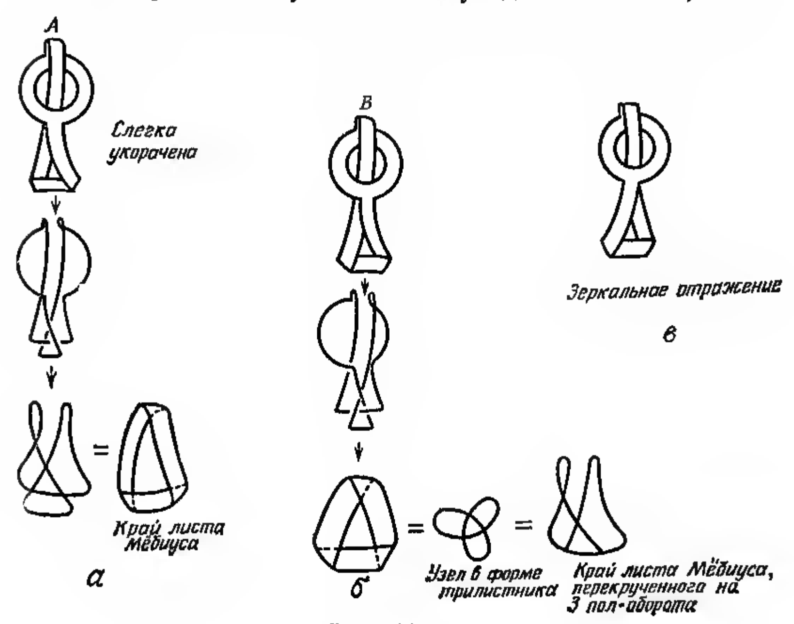


Рис. 182.

изучим края. На рис. 182, *а* показаны еще не разрезанная фигура A и ее край (у A, как и у B, всего один край), который изолирован, а затем представлеи в более простом виде. Мы видим, что фигура A устроена подобно листу Мёбиуса; поэтому, разрезав ее вдоль, мы получим тот же результат, что и в случае листа Мёбиуса,— одну петлю без узлов, закручеииую на 4 пол-оборота.

На рис. 182, *б* показана аналогичная процедура с фигурой B. Эта фигура оказывается аналогичной листу Мёбиуса, закрученному не на один (как обычно), а на

3 пол-оборота. Производя дальнейшие упрощения, мы приходим к узлу в форме трилистника. Дело в том, что фигуры A и B не являются точными зеркальными отражениями друг друга; для сравнения на рис. 182, *в* приведено зеркальное отражение фигуры A.

69. I. Диаметр кастрюли равен $21^1/_4$ дюйма.

Если мы спроектируем нашу пространственную картину на плоскость (рис. 183), то I будет соответствовать

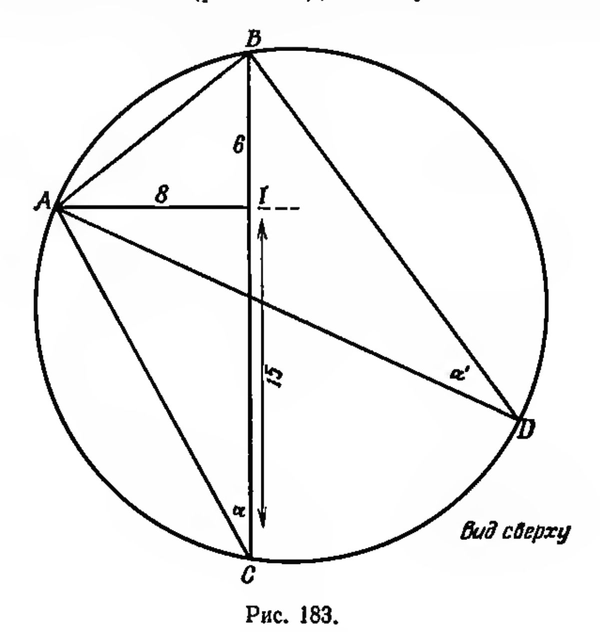


Рис. 183.

точке пересечения пластин; AI, BI и CI изобразят 6-, 8- и 15-дюймовые отрезки, отсекаемые дном кастрюли от полос, а AD будет соответствовать диаметру кастрюли. При этом

$$AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10,$$

$$AC = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17.$$

Поскольку вписанный в окружность $\angle ABD$ опирается на диаметр, то он равен 90°. $\angle\alpha = \angle\alpha'$, как вписанные

углы, опирающиеся на одну дугу. Наконец, $\angle AIC$ — прямой. Следовательно, $\triangle ABD$ подобен $\triangle AIC$.

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AC}{AI}\therefore AD=\frac{10\times 17}{8}=21{,}25=21\frac{1}{4}.$$

II. Невидимая точка пересечения дна кастрюли с одной из полос приходится снова точно на отметку 6 дюймов.

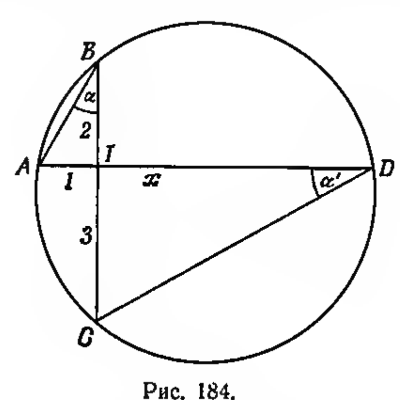


Рис. 184.

Действительно, на рис. 184 видно, что $\angle\alpha=\angle\alpha'$, как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу AC.

$\therefore$ прямоугольный $\triangle ABI$ подобен прямоугольному $\triangle CID$.

$$\therefore \frac{x}{CI}=\frac{BI}{AI}.$$

$$\therefore x=\frac{2\times 3}{1}=6.$$

70. Площадь крыши равна 200 м².

Поскольку видимый профиль крыши представляет собой равносторонний треугольник, высота a каждой треугольной грани должна равняться ширине дома, то есть 10 м (рис. 185, *а*). Другими словами, она в два раза больше высоты каждого из четырех треугольников, на которые естественно разбивается квадратное основание крыши размером 10×10 м (рис. 185, *б*). (Рис. 185 можно было бы и не приводить, поскольку все очень легко представить себе в уме. Заметим, что если при неизменном основании удваивается высота треугольника, то удваивается и его площадь.)

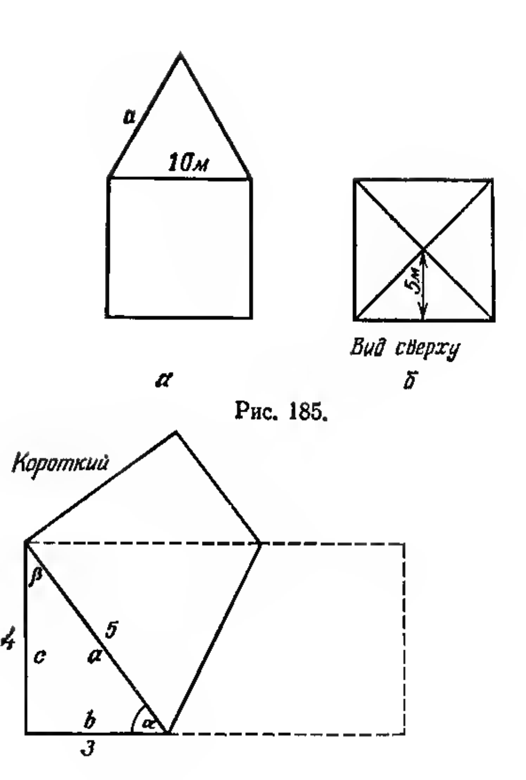


Рис. 185.

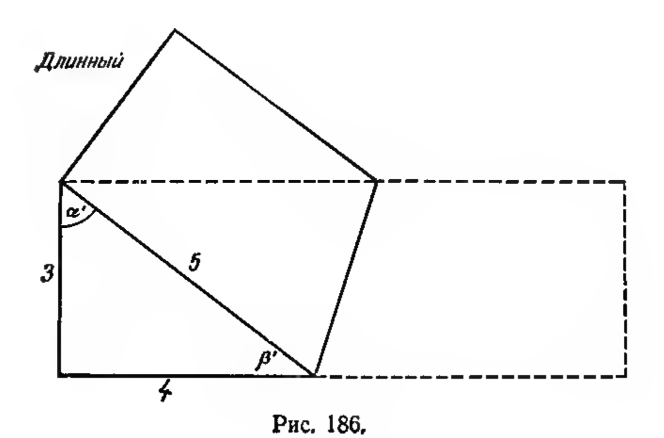
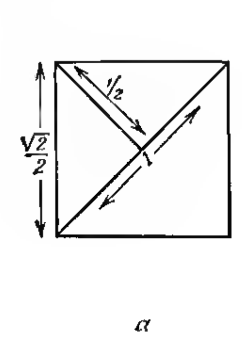


Рис. 186.

71. Достаточно однократно сложить каждый лист бумаги.

У каждого листа нужно совместить противоположные углы и разгладить складки. На рис. 186 мы увеличили размеры прямоугольников в несколько раз (у короткого прямоугольника — в четыре, а у длинного — в три раза). В первом случае размеры треугольников становятся равными 4, 5 и 3, а во втором случае они равны 3, 5 и 4. Значит, эти треугольники подобны, а их соответствующие углы α и α' равны (аналогично равны и углы β и β').



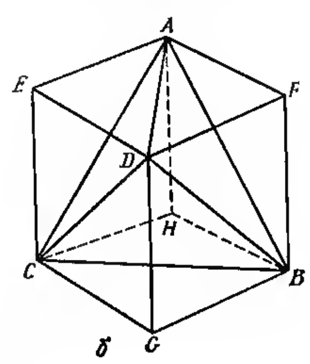


Рис. 187.

Приведем доказательство соотношений для случая короткого листа бумаги, у которого ширина равна 1, а длина — 2. Изменим масштаб, как показано на рис. 187.

В старом масштабе

$$a+b=2, \quad \therefore b=2-a; \quad c=1.$$

По теореме Пифагора

$$a^2=1+b^2=1+4-4a+a^2,$$
$$\therefore 4a=1+4+a^2-a^2=5.$$

Таким образом, в новом масштабе

$$a=5, \quad c=4 \quad \text{и} \quad b=3.$$

72. Примем длину ребер каждой пирамиды за 1, тогда старый памятник имел форму куба со стороной (высотой) $\sqrt{2}/2$. Если сторона квадрата равна $\sqrt{2}/2$, то его диагональ равна 1 (рис. 187, *а*).

На рис. 187, *б* изображен куб с ребром, равным $\sqrt{2}/2$; $ABCD$ — наибольший тетраэдр, который можно из него вырезать, причем останутся четыре равные треугольные пирамиды с вершинами в точках E, F, G и H.

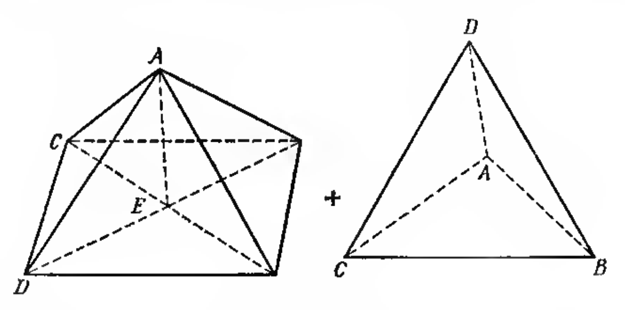


Рис. 188.

Их внутренние грани (основания) представляют собой равносторонние треугольники, а три входящих из противоположных вершин ребра каждой из них взаимно перпендикулярны. Мы можем соединить эти четыре пирамиды так, чтобы их вершины сошлись в одной, нижней, точке, а сами они образовали в итоге новую пирамиду (рис. 188). У этой пирамиды квадратное основание и грани, представляющие собой равносторонние треугольники. «Внутренний» тетраэдр представляет собой треугольную пирамиду. Все ребра равны 1.

73. I. Ключ к решению заключается в слове *переложить.* Если мы переложим средний ряд так, как показано на рис. 189, то при этом в пачке остается место только для 15 сигарет, а 4 сигареты мы удалим.

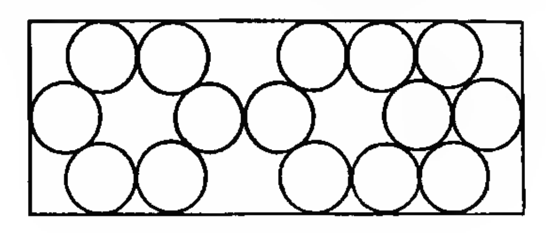
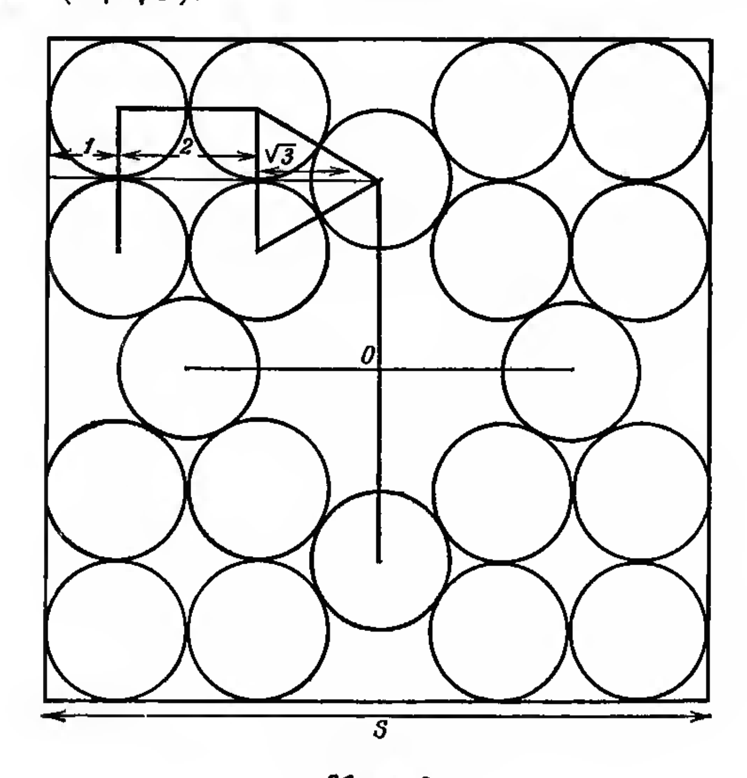


Рис. 189.

II. Расположеиие указаио иа рис. 190. Нумизмату ие следовало удивляться, что квадрат оказался большим, чем раиьше, ведь ои содержит больше кругов. $S = 2(3+\sqrt{3})r$.



20 кругов

Рис. 190.

III. Расположеиие указаио иа рис. 191. Объясиеиие содержится в самом рисуике. $S = 2(\sqrt{6}+\sqrt{2}+1)r$.

IV. Коиструкция оказалась иежесткой из-за возможиости вращеиия (как иа рис. 60, *б* в условии задачи). На рис. 192, *а* видио, что ии одии круг ие может переместиться сам по себе, но все три круга как целое мы можем повериуть, чего иельзя сделать иа рис. 192, *б*.

Еще ясиее это можио увидеть иа рис. 192, *в*, где вместо кругов (пунктир) мы рассматриваем их центры. Если мы переместим один из кругов вдоль стороны треугольника, то его центр переместится по прямой, параллельной этой стороне, так что на рис. 192, *в* мы начертили новый (сплошной) треугольник, расположенный внутри исходного (пунктирного) треугольника. Ясно,

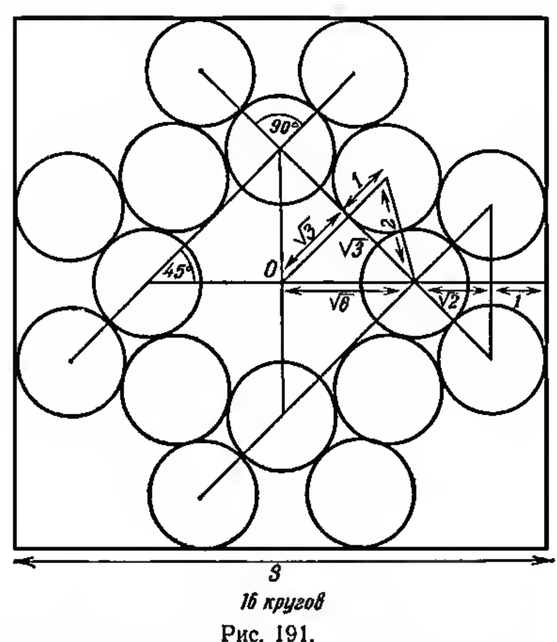
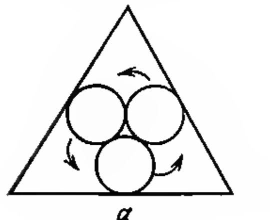


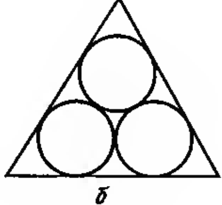
Рис. 191.

что круги ие обязаны вращаться, но могут скользить по соприкасающимся с ними поверхностям.

Еще одним важным фактором в данном случае является симметрия. На рис. 193 показана нижняя часть интересующего нас расположения. Если группу *ABC* можио вращать, когда *A* движется вдоль прямой *OAH*, то ее зеркальное отражение *ADE*, симметричное с ней относительио прямой (в пространственном варианте — плоскости) *OAH*, можио вращать в противоположном направлении, в то время как их общая часть *A* будет передвигаться вдоль *OAH*. Аналогично дело обстоит и с *BFG*, другим зеркальиым отражеиием *ABC*, причем *B*

будет двигаться по осн симметрии OBJ. Как я иа рис. 192, *в*, мы чертим треугольник ABC и решаем, можно ли его повериуть в какую-либо сторону (или в обе стороны) в треугольнике OKL ($KL \parallel HJ$).


а


б

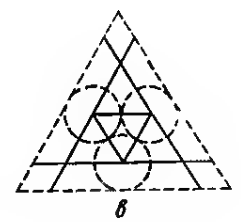

в

Рис. 192.

Известно, что если A движется по OK, а C — по KL, то B описывает эллипс (часть его изображена пуиктиром), большая ось которого прииадлежит BK — биссектрисе прямого угла OKL. Следовательно, вращение возможно в обе стороны. Очевидно, подобные рассуж-

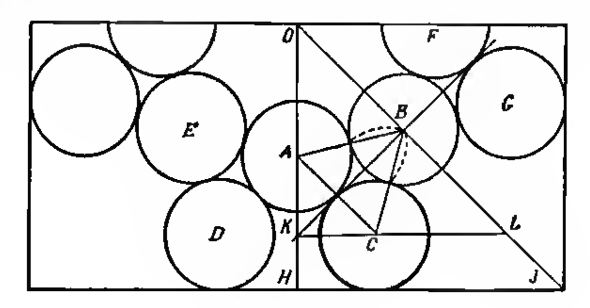


Рис. 193.

деиия в силу симметрии применимы ко всем трем группам кругов. Можио заметить, что существуют два возможных путн для того, чтобы нарушить исходное расположеиие: A и три аиалогичиых круга движутся по иаправлению к O или в обратную сторону. Если зафиксировать любой из 16 кругов, то вся коиструкция станет жесткой. Однако, как поняла жеиа нумизмата, ии одни из кругов не фиксирован.

V. Существуют два довольно очевндных пути; первый (рнс. 194) состонт в том, чтобы деформнровать шестиугольное расположенне кругов, уменьшнв размер прямоугольннка по вертикалн. Во втором случае (рнс. 195) мы начннаем с снмметрнчного полого шестяугольннка, нскаженного так же, как н в первом случае, но расположенного внутрн чуть большего квадрата. Очевндно, что обе конструкцнн жесткне. Раднусы всех кругов равны 1.

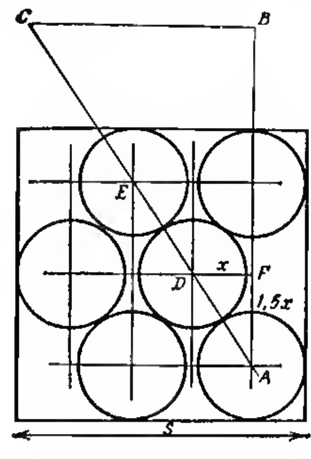


Рис. 194.

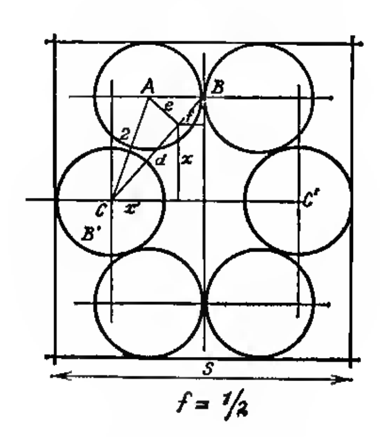


Рис. 195.

Предположнм, что рнс. 194 верен. Тогда центры четырех внешннх кругов лежат на сторонах некоторого квадрата; а в снлу снмметрин все треугольинкн, образованные любымн тремя сопрнкасающнмнся кругамн, конгруэнтны. Такнм образом, расположение центров делнт этот квадрат по вертнкалн на две, а по горнзонтали на трн равные частн. Чтобы постронть данный чертеж, мы сначала постронм круг A и вертнкальный отрезок AB, равный 3 пронзвольным удобным для нас еднннцам (на рнс. 194 мы взялн 2 едяннцы). Затем проведем влево под прямым углом BC, равную 2 еднннцам (нлн 4). Проведем отрезок AC. В снлу подобня треугольников AC пройдет через центры кругов D н E; их можно найтн, откладывая днаметры от A вдоль AC. Остальное уже легко закончнть.

Подсчитаем длину S стороны квадрата. Пусть $DF = x$; тогда в силу пропорциональиости $AF = 1{,}5x$ и по теореме Пифагора

$$x^2 + (1{,}5x)^2 = 4; \quad x = \sqrt{1{,}2} \ (= 1{,}0954\ldots), \quad S = 2 + 3x,$$

или 5,286 ....

Чтобы построить конфигурацию, изображенную иа рис. 195, построим круг с центром в A; проведем горизонтальную прямую, пересекающую окружность в точке B; проведем прямую BB' под углом в 45° к AB и дугу радиуса 2 с центром в B, пересекающую BB' в точке C; проведем окружность (радиуса 1) с центром в C. Остальное уже легко сделать. Чтобы вычислить S, проведем отрезок $e \perp BC$, отрезок $f \parallel AB$ и отрезок x под прямым углом к AB. Поскольку $\angle BCC' = 45°$, $x' = x$. Далее

$$AB = 1; \quad e = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot AC = 2; \quad d^2 = 4 - \frac{2}{4}; \quad \therefore d = \sqrt{3{,}5};$$

$$2x^2 = 3{,}5; \quad x = \sqrt{1{,}75}.$$

Поскольку $f = 1/2$, то $S = 3 + 2 \cdot \sqrt{1{,}75} = 3 + \sqrt{7}$, или 5,64575 ....

74. Третий (изолированный) прямой угол ($\angle 3$ на рис. 196, *а*) должен быть образоваи двумя ребрами a и c нсходящего из второго конца ребра b, общего для двух прямых углов *1* и *2*. На рис. 196, *б* показана развертка нашего тетраэдра на плоскость. (Если тетраэдр сделан нз картона, то такую развертку можно получить, разрезав его вдоль некоторых ребер, а затем развернув граии на плоскость.)

Доказательство. Четыре грани тетраэдра содержат 12 плоских углов. Кроме (прямых) углов $\angle 1$, $\angle 2$ и $\angle 3$ нмеется еще 9 углов; причем углы, обозначеииые буквой O (на рис. 196, *б*), мы можем ие рассматривать, поскольку они принадлежат прямоугольным треугольникам, содержащим прямые углы $\angle 1$ и $\angle 2$. Мы можем также игнорировать угол O', поскольку он примыкает к той же вершине, что и $\angle 1$, и $\angle 2$. Таким образом, остаются углы $\angle 4$, $\angle 5$, $\angle 6$ и $\angle 7$; переберем их по очереди, дабы доказать, что ни один из них ие может быть прямым.

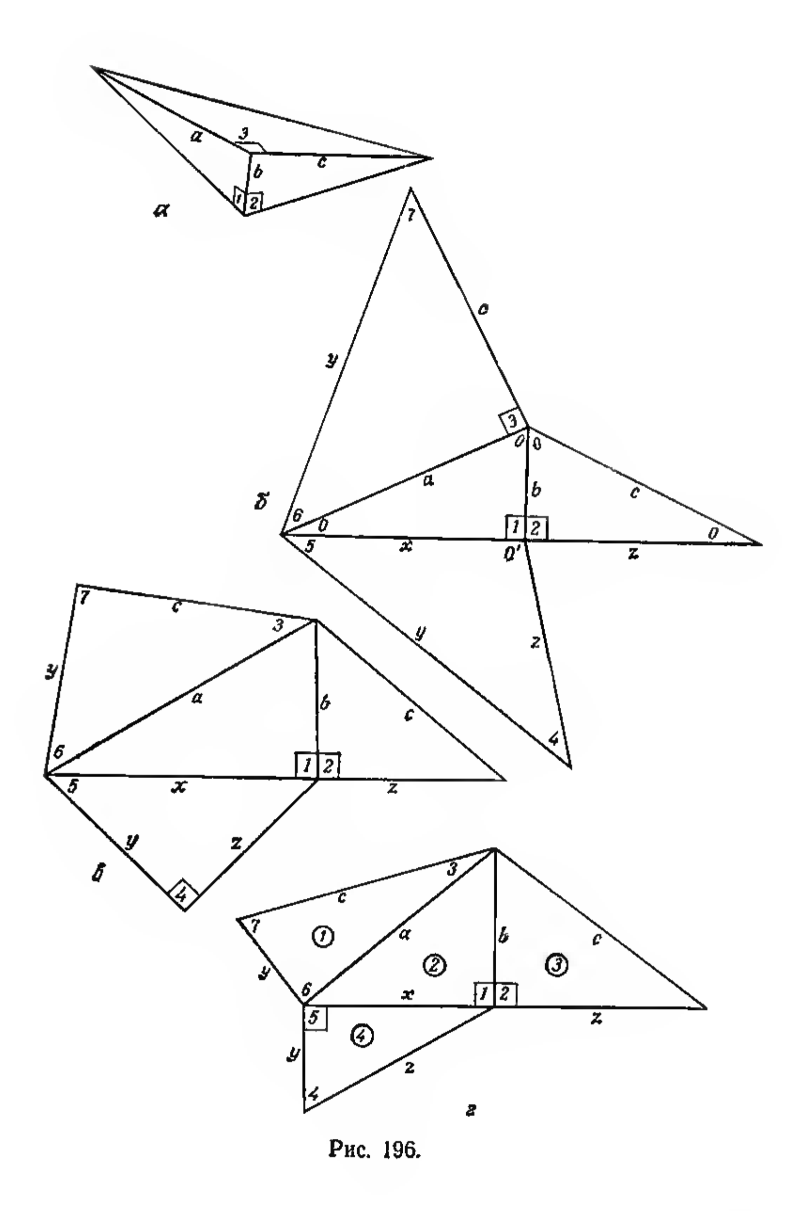

а
a
b
c
3
1
2
б
7
y
c
3
0
a
b
c
6
0
1
2
0
5
x
0'
z
y
z
4
в
7
c
3
y
a
b
c
6
1
2
5
x
z
y
z
4
г
3
c
7
1
a
b
c
2
3
y
6
x
1
2
5
4
z
y
z
4

Рис. 196.

Если $\angle 4 = 90°$ (рис. 196, *в*), то

$$y^2 + z^2 = x^2,$$
$$x^2 + b^2 = a^2.$$
$$\therefore y^2 + z^2 + b^2 = a^2,$$
$$z^2 + b^2 = c^2,$$
$$\therefore y^2 + c^2 = a^2.$$

Значит, угол $\angle 7$ — прямой. Двигаясь в обратном порядке, мы получаем, что если $\angle 7 = 90°$, то и $\angle 4 = 90°$ Таким образом, лишь один из углов ($\angle 4$ и $\angle 7$) не можст быть прямым.

Если $\angle 5 = 90°$ (рис. 196, *г*), то

$$x^2 + y^2 = z^2,$$
$$b^2 + x^2 = a^2,$$
$$b^2 + z^2 = c^2.$$
$$\therefore b^2 + x^2 + y^2 = c^2,$$
$$\therefore a^2 + y^2 = c^2.$$

Зиачит, $\angle 6 = 90°$. Точно так же, если $\angle 6 = 90°$, то и $\angle 5 = 90°$. Таким образом, нам остается единственная возможность: $\angle 3 = 90°$.

75. Траектории однпаковы, ио в случае рис. 64, *б* в отличие от случая *а* точка P' будет описывать траекторию в направлении против часовой стрелки (рис. 197).

Не нужно зиать уравнений гипоциклоид, для того чтобы заметить, что, когда A' катится налево (точка касания A' с B' перемещается по часовой стрелке), P' начинает двигаться влево. Поскольку длина окружности A' составляет $^5/_6$ от длины окружности B' точка P' коснется B' в точке P'', отсекающей $^1/_5$ от левой полуокружности $TP''T'$. Затем движение будет повторяться против часовой стрелки.

76. *Доказательство без помощи алгебры.* Наименьшее число квадратов равно 8. (В случае 6 квадратов $r = (\sqrt{2}\,\mathrm{ctg}\,30° - \sqrt{2})/2$, то есть иррациональному числу; в случае 7 квадратов дело обстоит еще хуже.)

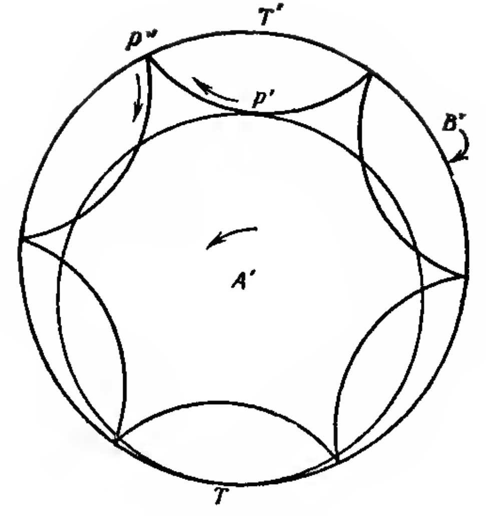


Рис. 197.

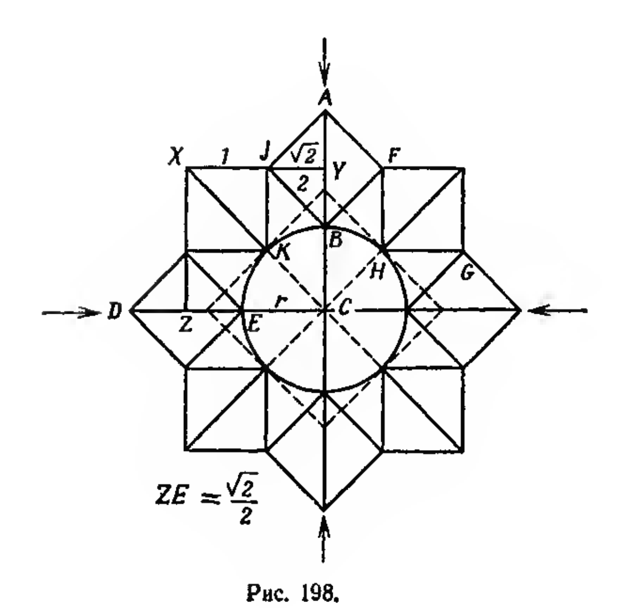


Рис. 198.

В силу симметрии (рис. 198) диагонали квадратов, расположенных через один, AB, DE и т. д., лежат на продолжении взаимно перпендикулярных радиусов CB, CE и т. д. Таким образом, соответствующие стороны таких квадратов параллельны друг другу (например, $FH \| JK$), и мы можем параллельно перенести, как показано стрелками, 4 квадрата так, чтобы вершины их углов (вроде F и G) сошлись во внутренних вершинах неподвижных квадратов (например, в H, см. пунктирные линии). В силу симметрии все 4 подвижных квадрата сойдутся в C.

Следовательно, $r(=BC)$ равен расстоянию, пройденному точкой F (или G), пока она не заняла положеиие H. Значит, радиус r равен стороне квадрата, то есть 1.

Для подозрительных читателей:
в силу симметрии $YC \perp ZC$, $XY = ZC$, $XZ = YC$;

$$XY = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$ZC = r + \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore r = 1.$$

77. Радиусы (или диаметры) монет равны 1, 2 и 3 (рис. 199).

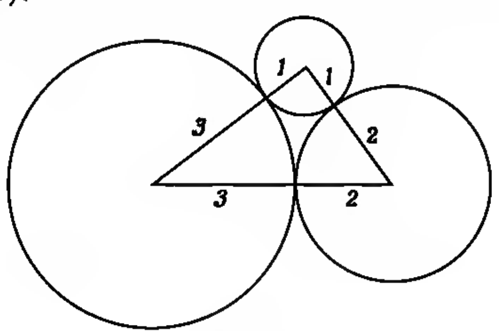


Рис. 199.

78. Меньшая монета весила 3 унции.

Когда меньшая монета достигала точки, в которой она начинала крениться, ее диаметр AD (рис. 200) должен был совпадать с хордой круглой дырки. Точка, в ко-

торой край монеты касался центра дырки C, была расположена на CB, где B — центр монеты $CB \perp AD$, так как $AC = DC$ — радиусы дырки. Поскольку AB и CB — радиусы монеты, они равны между собой; пусть их

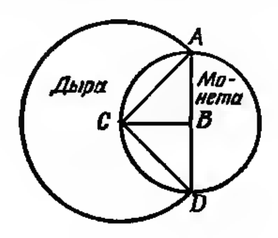


Рис. 200.

длина равняется 1. Тогда $AC = \sqrt{2}$; а поскольку толщина монет одинакова, их веса пропорциональны площадям, которые в свою очередь пропорциональны квадратам их радиусов. Следовательно, бо́льшая монета в два раза тяжелее меньшей (ибо $\sqrt{2}^2 = 2$).

79. Данное построение можно было бы назвать очень чувствительным: малейшая неточность сильно искажает результат. В этом отношении оно противоположно тем построениям, с помощью которых якобы можно получить числа вроде π и которые кажутся безукоризненными, а на самом деле неверны и дают лишь хорошую аппроксимацию для таких чисел. Мы опишем сейчас это построение, а доказательство приведем позднее. Допустим, что мы уже начертили две монеты в прямоугольном углу коробки с вершиной V (рис. 201). (Мы опускаем очевидные детали построения вроде деления угла на две равные части и т. п.). В силу симметрии, вытекающей из условий задачи, мы рассмотрим только одну монету с центром A, вторая монета обозначена пунктирной линией. Обе монеты касаются в точке B прямой, выходящей под углом 45° из вершины V. Очевидно, центр искомого круга лежит на VB.

Проведем радиус BA и продолжим его до точки D; это продолжение пересечет VC в такой точке C, что $CD = CA$.

Построим полукруг на BD, как на диаметре.

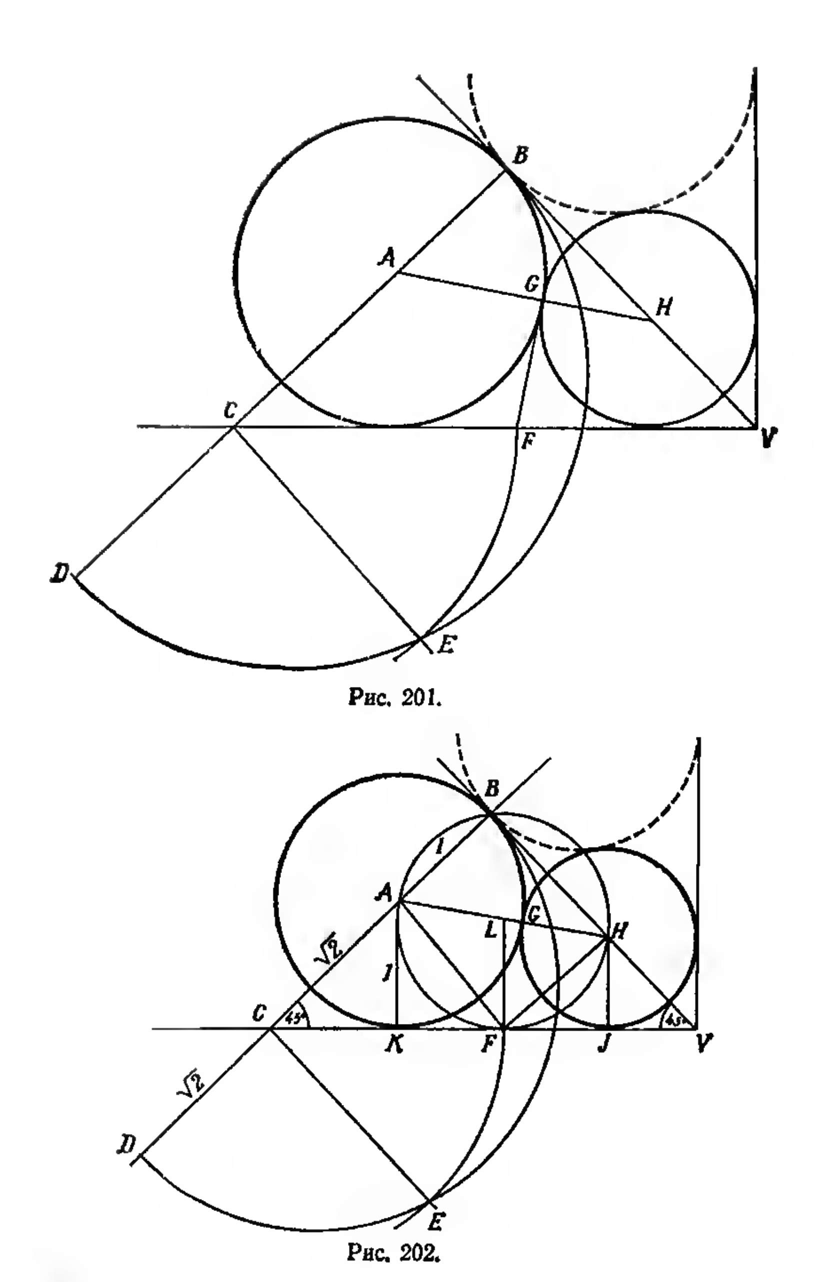


Рис. 201.

Рис. 202.

Проведем отрезок CE перпендикулярно BD, который пересечет полукруг в точке E.

Из C, как из центра, сделаем на VC засечку $F (CF = CE)$.

Проведем касательную FG к кругу A (G — точка касания).

Отрезок AG продолжим до пересечения с прямой VB в точке H.

H — центр искомого круга.

Нам осталось только дать *доказательство* справедливости такого построения. Мы воспользуемся рис. 202, где будем придерживаться тех же обозначений, что и на рис. 201, только добавим еще некоторые нужные линии и точки. Предположим, что искомый круг уже построен; ясно, что такой круг, касающийся обеих монет и обеих прямых, проходящих через V, существует. В силу симметрии его центр H будет принадлежать VB, биссектрисе угла коробки V. AH соединяет центры выбранного большого круга и искомого круга, G — точка их касания. Проведем GF перпендикулярно AH, где точка F принадлежит CV. Тогда:

FG — общая касательная кругов A и H;
AB — радиус круга A, $AB = 1$;
VB — касательная к кругу A в точке B, $\therefore \angle CBV = 90°$ и $\angle BCV = 45°$.

Проведем HJ и AK перпендикулярно VC; проведем FH и FA, а также FL, где L — середина AH.

Тогда:

FK и FG касаются круга A, а FG и FJ — круга H.
$\therefore FK = FG = FJ$; FA — биссектриса $\angle GFH$, а FH — биссектриса $\angle CFJ$.
$\therefore \angle AFH$ равен сумме половин смежных углов $\angle GFK$ и $\angle GFJ$.
$\therefore \angle AFH = 90°$, а поскольку $\angle ABH = 90°$, точки A, B, H и F лежат на одной окружности с центром L и диаметром $ALGH$.
$\therefore$ можно провести окружность через A, B, H и F с центром в L.
$AK \parallel HJ$, $LA = LH$ и $FK = FJ$.
$\therefore LF$ перпендикулярно KJ.
$\therefore CF$ — касательная к кругу L,

По хорошо известной теореме $CB : CF = CF : CA$.

$$\therefore \frac{CB}{CF} = \frac{CF}{CA} \quad \text{и, очевидно,} \quad CA = \sqrt{2}.$$

$$\therefore \frac{1+\sqrt{2}}{CF} = \frac{CF}{\sqrt{2}}.$$

$$\therefore CF^2 = \sqrt{2} + 2.$$

Теперь мы добавим ту часть исходного построения, которая дает положеиие F, и, исходя отсюда, докажем, что величина CF в этом построеиии как раз и равна только что найдеиному значению. По другой хорошо известиой теореме, поскольку DEB — полукруг, построеиный на диаметре DB,

$$CE^2 = CD \times CB,$$

$$\therefore CE^2 + \sqrt{2}\,(\sqrt{2} - 1) = 2 + \sqrt{2},$$

$$\therefore CF^2 = \sqrt{2} + 2.$$

80. Диагональ DD' (рис. 203) относится к ширине двух моиет как φ. DD' представляет собой иаибольший

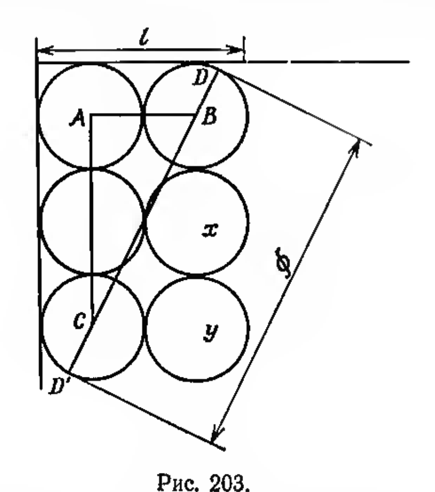


Рис. 203.

линейный размер нашей группы монет, а прямая DD' проходит через центры B и C.

Если мы будем действовать, так сказать, в половинном масштабе и примем AB за 1, то окажется, что $AC = 2$, а гипотенуза $BC = \sqrt{5}$.

BD и CD' — радиусы, так что $DD' = \sqrt{5} + 1$.

Если же мы вернемся к исходному масштабу и примем за 1 суммарную ширину двух монет, то величина DD' выразится как

$$DD' = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \varphi$$

(монеты x и y — лишние).

81. Ключ к решению заключен в слове ROME (Рим), намекающем на то, что числа записаны римскими цифрами:

$$\begin{array}{r} -\,DCVI \\ LXV \\ \hline DXLI \end{array}, \quad \text{или в арабских цифрах} \quad \begin{array}{r} -\,606 \\ 65 \\ \hline 541 \end{array}.$$

82. Сделайте горизонтальную складку, проходящую через точку A (рис. 204, *а*); затем сделайте складку AB и наконец складку вдоль диагонали, проходящей через C.

Для доказательства проведем диагональ FB (рис. 204, *б*). E — середина отрезка FB, а A — середина отрезка FC; следовательно, точка пересечения D отрезков CE и AB — это центр тяжести треугольника FBC. Значит, $BD = 2AD$, а $CD = 2DE$. У треугольников AED и ADC — общая сторона. Пусть площадь $\triangle AED$ равна 1; тогда площадь $\triangle ADC = 2$. Поскольку прямоугольник $AGBC$ составлен из четырех треугольников, таких, как AEC, его площадь $= 12$, а площадь исходного прямоугольника $FHBC = 24$. Так как $BD = 2AD$, площадь $DBC = 4$, а с помощью вычитания находим площадь четырехугольника $EGBD = 5$. Аналогичным образом площадь $HGE = 3$ и площадь $FHEA = 9$. (Все это отмечено на рис. 204, *а*).

Отсюда легко понять, как следует провести 12 жирных линий (рис. 204, *в*), дабы получить 24 искомые дроби. (Цифры на рис. 204, *в* показывают число двадцатьчетвертых в каждой указанной области.)

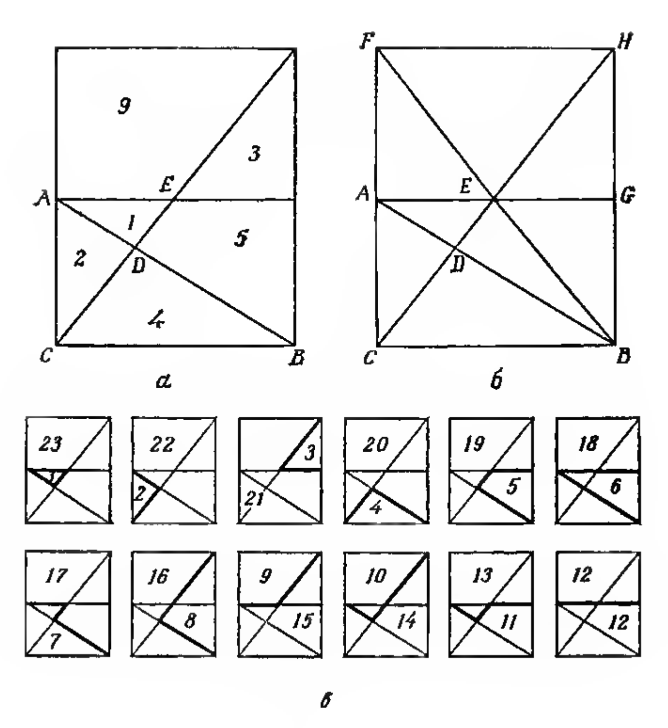


Рис. 204.

83. Расположение колец показано на рис. 205. Взаимное расположение колец *1*, *2* и *3* такое же, как и на рис. 69, *а* из условия задачи; аналогично расположены группы колец *2*, *3* и *4*; *3*, *4* и *5* и т. д.

Лорд был восхищен, однако его личный алхимик, большой любитель четных чисел, особенно обожавший квадраты, сказал:

— Все это, конечно, хорошо, но расположение колец в отличие от принятого у нас не квадратное. Я имею в виду, что каждое из колец связано с шестью окружающими его кольцами, а не с четырьмя, как в наших кольчугах. Готов поклясться, что вам не удастся сделать такую кольчугу, как у нас, вашим способом.

Однако оружейник справился и с этой задачей. В новой кольчуге кольца располагались вдоль прямых

линий, пересекающихся под прямыми углами, и образовали квадраты вместо шестиугольников. Как действовал оружейник? В этом состоит *головоломка 83а.*

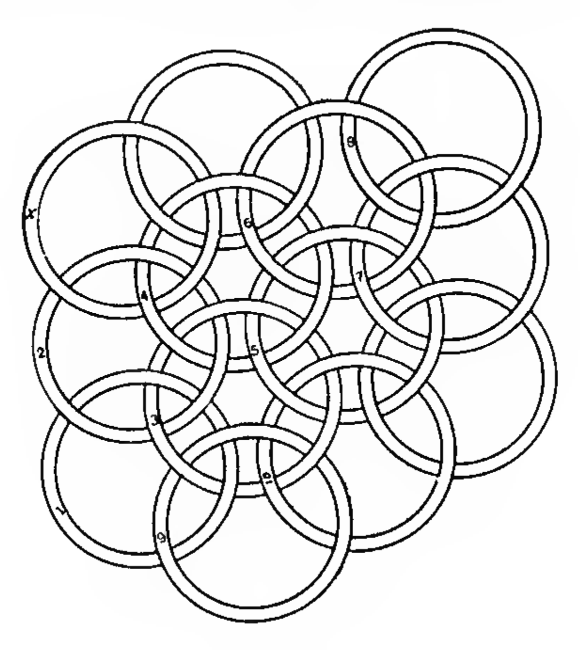


Рис. 205.

83а. Нужное расположение колец показано на рис. 206, *а*. Существует и другое расположение (рис. 206, *б*), при котором кольца образуют, очевидно, квадраты; однако если их потянуть в направлении, указанном большими стрелками, то мы получим расположение из предыдущей головоломки (рис. 206, *в*) [1]. Расположение же, представленное на рис. 206, *а*, нельзя нарушить подобным образом.

---

[1] Если потянуть кольца *X* и *Y*, то кольца *1*, *2*, *4*, *5*, *10*, *9* и *X* образуют шестиугольник вокруг кольца *3* (рис. 206, *в*), причем номера колец соответствуют номерам на рис. 205. С кольцом *Y* этого не произойдет, потому что здесь показан лишь небольшой участок кольчуги.

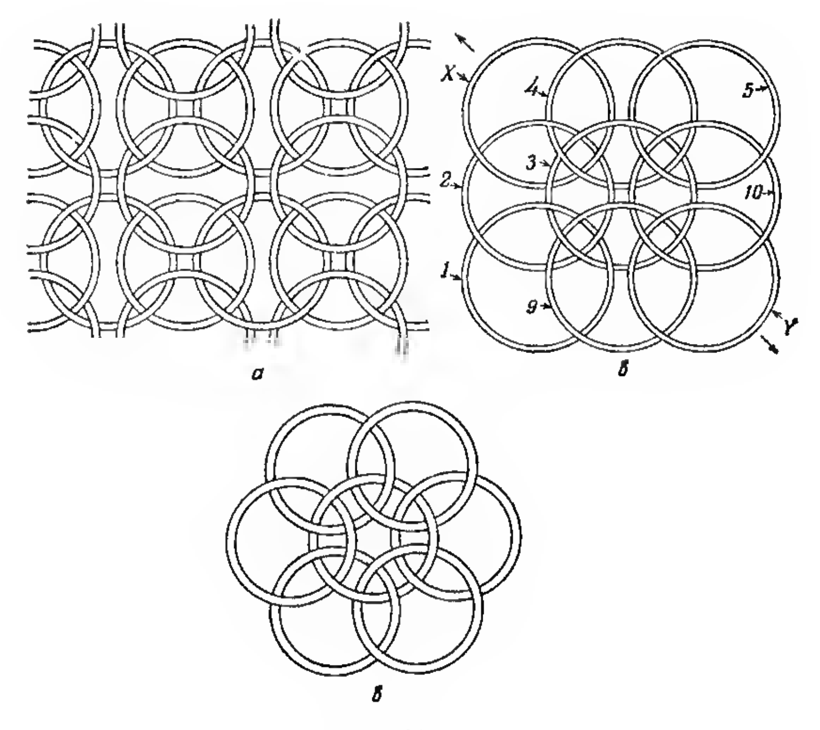


Рис. 206.

84. 1. Сложите вместе углы A и B и проведите центральную складку (рис. 207).

2. Поместите вершину угла A на центральную складку и проведите новую складку.

3. Отогните верхний край вниз назад на уровне A, образуя складку CD, которую можно сделать горизонтальной, совмещая соответствующие участки центральной складки; затем верните угол A в исходное положение (A).

4. Совместите AD с частью отрезка CD, образуя при этом новую складку DE.

5. Отогните CB назад, образуя при этом новую складку EF, идущую вдоль AE.

Теперь отогните назад все загнутые участки; в результате получится искомый квадрат $AEGD$.

Пусть $AB = 2$, тогда площадь исходного квадрата $=$ $= 4$. На рис. 207 в случае 3 $AC = 1$, $AB = 2$; следовательно $CB = \sqrt{3}$, в случае 6 площадь квадрата $AEGD = \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$, что составляет $^3/_4$ от 4.

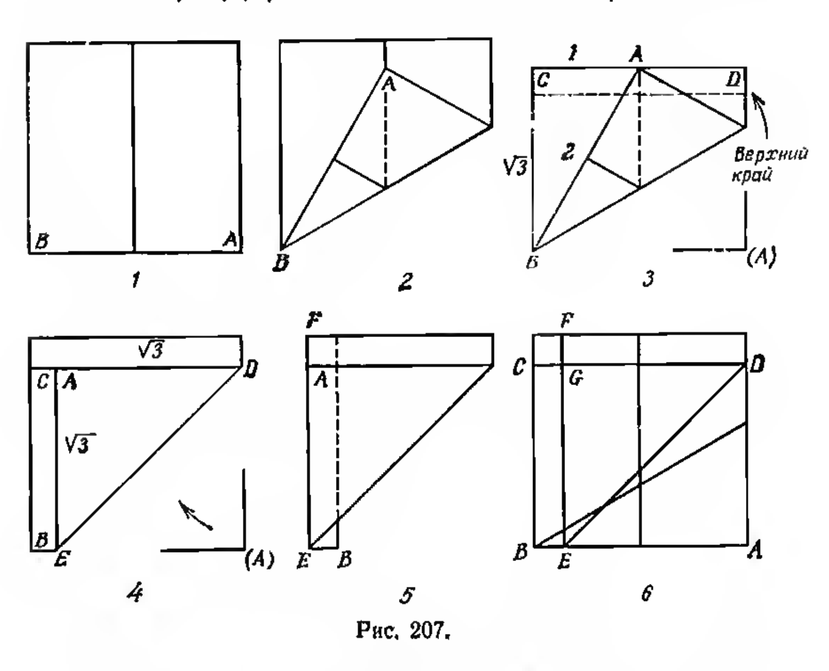


Рис. 207.

85. Существует только одна такая часть — это верхняя половииа буквы S

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
V	P	O	O	E	E	O	F	L	U	L	E	I
V	S		U	L		A	I			V		V
H										V		I

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
I	Q	R	O	P	B	F	J	A	V	V	V	E
V			A	A	?	I	I	A	V	V	V	V
I											I	

Ее можио было бы получить из цифры 8, одиако мы рассматривали только буквы, и цифры нам

не подходят. Буквы в верхних строках составлены из частей (выделенных жирным шрифтом) букв, расположенных под ними.

86. $x = 2$.

Быть может, следующие соотношения знакомы читателю, однако если это и не так, их легко вывести из исходной пропорции

$$\frac{a}{a+b} = \frac{b}{a}.$$

$$\varphi^2 = \varphi + 1,$$

$$\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1, \quad \text{откуда} \quad \varphi^2 - \frac{1}{\varphi} = 2.$$

Поэтому при $x = 2$ показатель первого члена уравнения, заданного в условии, равен

$$\varphi^x - \frac{x-1}{\varphi} = \varphi^2 - \frac{2-1}{\varphi} = 2,$$

а все уравнение превращается в тождество

$$\varphi^2 - \frac{1}{\varphi} = 2.$$

87. Нужное число квадратных огородов заполнит квадрат, сторона которого совпадает с общей длиной построенных домов, измеренной вдоль края поля (рис. 208), ибо

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2.$$

88. Пунктирные линии показывают положение перед складыванием.

Сложим прямоугольник вдоль диагонали CB (рис. 209, *а*). Отогните угол A на себя так, чтобы сторона AB легла на диагональ CB (рис. 209, *б*). Тогда $DB : CA = \varphi : 1$.

Сперва выпишем соотношения, содержащие φ, которые можно вывести непосредственно из определения φ:

$$\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}; \quad \varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}; \quad \sqrt{5} - 1 = 2\varphi - 2.$$

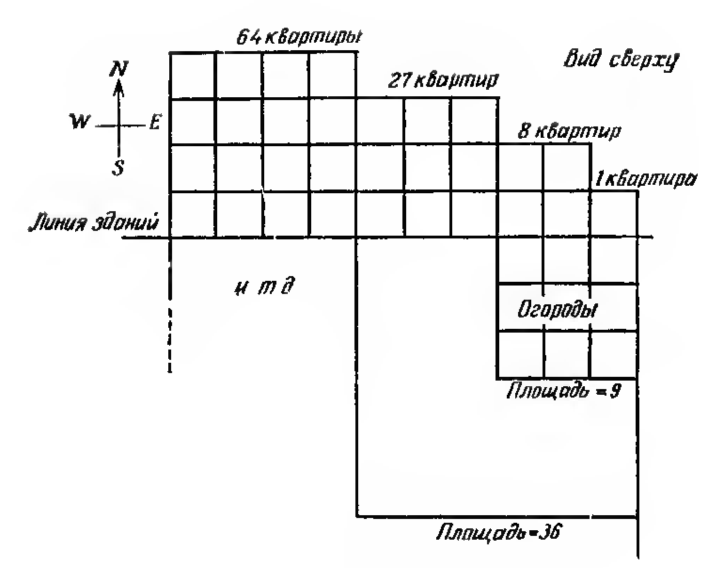


Рис. 208.

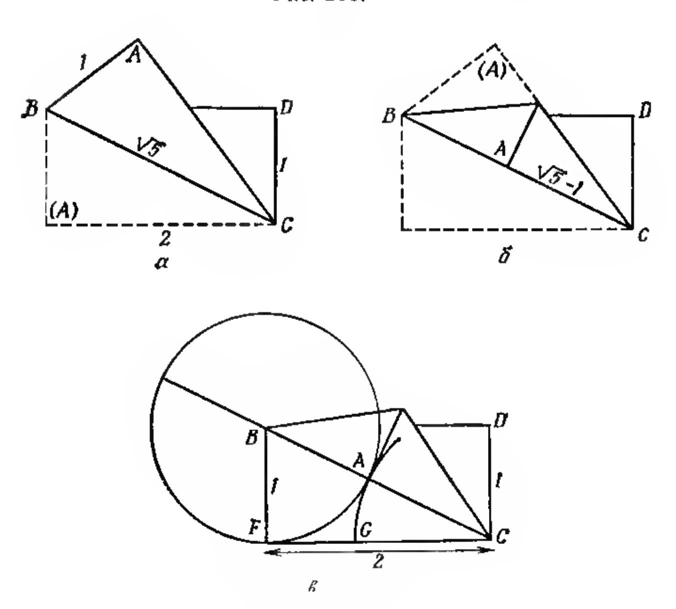


Рис. 209.

На рис. 209, *б* $CB = \sqrt{5}$, а $CA = \sqrt{5} - 1 = 2\varphi - 2$, поэтому и

$$\frac{1}{2\varphi - 2} = \frac{DB}{2}.$$

$$DB = \frac{2}{2\varphi - 2} = \frac{1}{\varphi - 1},$$

а поскольку $\varphi - 1 = 1/\varphi$, то $DB : CA = \varphi$.

На рис. 209, *в* видно, каким образом наш прямоугольник можно связать с хорошо известным евклидовым построением, при котором CF делится точкой G так, что $CF : CG = CG : GF$ $(CG = CA)$, другими словами, в отношении $= \varphi$.

89. Мальчик пренебрег тем, что треугольники равнобедренные, зато воспользовался теоремой, утверждающей, что если в произвольном четырехугольнике диаго-

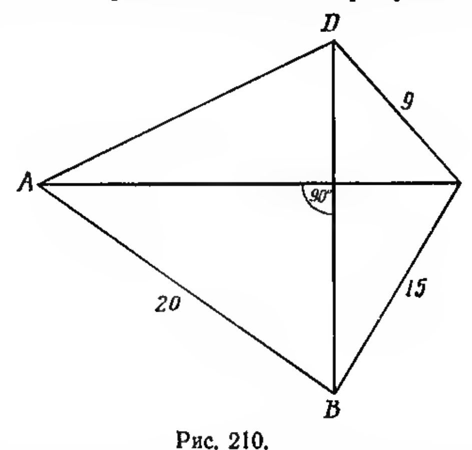


Рис. 210.

нали (в нашем случае — ребра) пересекаются под прямым углом, то сумма квадратов противоположных сторон такого четырехугольника равна сумме квадратов двух других сторон. Иными словами, $20^2 + 9^2 = 15^2 + AD^2$ (рис. 210). Следовательно, $AD = \sqrt{256} = 16$.

90. Пусть сторона исходного квадрата равна 2. На рис. 211, *а* мы с помощью одного складывания находим середину стороны квадрата; вторая складка представляет собой диагональ прямоугольника 1×2. Загнем

угол A вниз (рис. 211, *б*) так, чтобы AC лег вдоль второй складки, образуя третью складку BC. Отогнем A назад и проведем четвертую складку BD параллельно AC (рис. 211, *в*), совмещая ED с DC. Тогда $AC : AB = \varphi$.

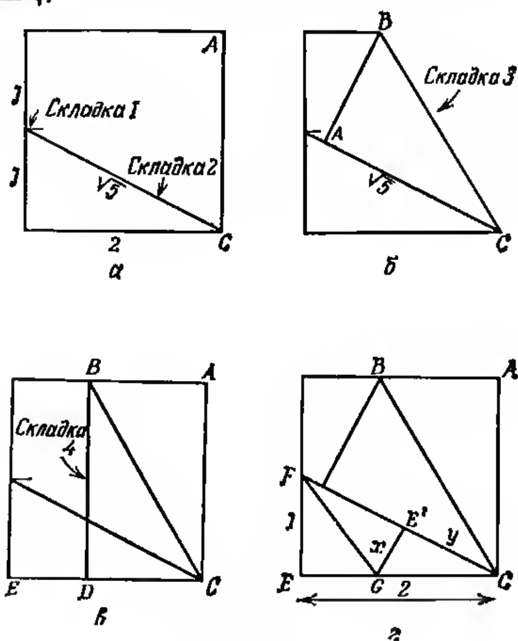


Рис. 211.

Доказательство. Загнем (рис. 211, *г*) угол E вверх так, чтобы FE лег на FC. Как мы видели в головоломке 88, $2/y = \varphi$; значит, $y = 2/\varphi$. Поскольку $\triangle E'CG$ подобен $\triangle FCE$, $y = 2x$.

$$\therefore 2x = \frac{2}{\varphi}.$$

$$\therefore x = \frac{1}{\varphi} \quad \text{и} \quad \frac{1}{x} = \varphi.$$

Отрезок FG делит $\angle EFE'$ пополам, $\angle ACF = EFE'$, и отрезок BC делит пополам $\angle ACF$.

$$\therefore \triangle ACB \text{ подобен } \triangle FEG.$$

$$\therefore \frac{AC}{AB} = \varphi.$$

91. Это расстояние равно $\varphi - 1$ ($= 0,618...$).

Способ, которым нужно сложить страницу, состоит в следующем (он показан вначале для книги обычных пропорций).

Поскольку ни одну точку страницы нельзя переместить по горизонтали дальше от корешка, движение должно происходить вверх или вниз. Диагональ *BC*

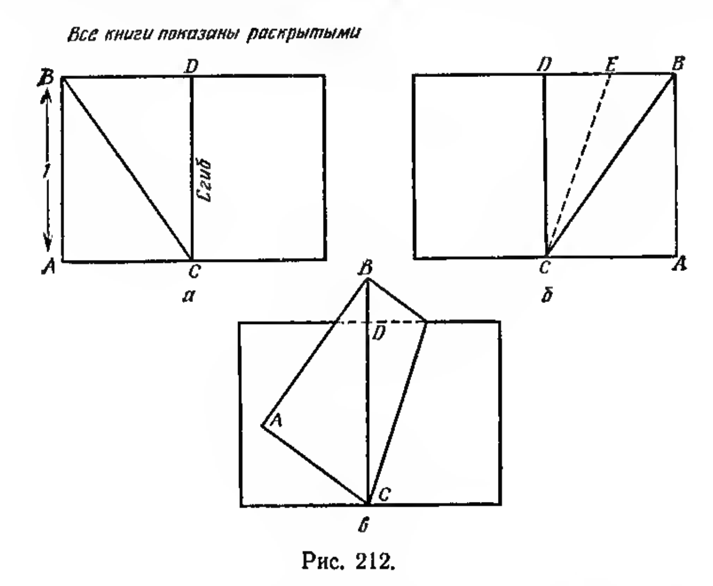


Рис. 212.

(рис. 212, *а*) представляет собой наибольший линейный размер страницы, и если мы будем вращать отрезок *BC* вверх, взяв в качестве центра вращения точку *C*, то угол *B* в процессе такого вращения удалится на максимальное расстояние (в проекции) от линии обреза. Перелистнем страницу направо (рис. 212, *б*); затем сложим ее вдоль биссектрисы *EC* угла *BCD* налево (рис. 212, *в*). При этом *BC* ляжет на вертикаль *DC*, а точка *B* удалится на максимальное расстояние от линии обреза. (Теперь можно закрыть книгу, перегнув страницу еще раз вдоль *BC*.)

Если бы ширина книги была достаточно большой по сравнению с высотой, то угол *A* вылез бы за обрез (рис. 213, *а*); но в условии говорилось о том, что внеш-

ний угол оказался *на* крае страницы, и, поскольку B расположен выше края, угол A должен лежать на верхнем крае, то есть на линии обреза (рис. 213, *б*).

Чтобы обосновать ответ, рассмотрим рис. 213, *б*. По хорошо известной теореме, поскольку углы BAC и

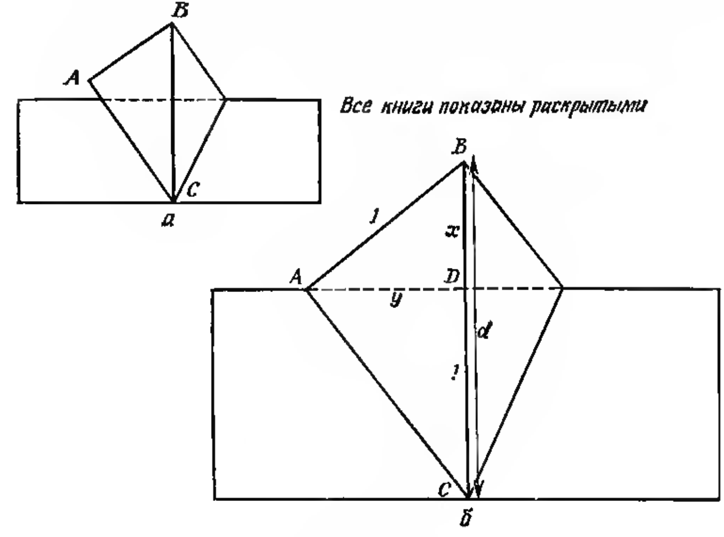


Рис. 213.

BDA — прямые, AD есть «среднее пропорциональное» величин BD и BC; другими словами, $x : y = y : 1$:

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{1},$$

$$\therefore y^2 = x.$$

По теореме Пифагора $y^2 + x^2 = 1$.

$$\therefore x + x^2 = 1, \quad \text{а, поскольку} \quad x = d - 1,$$

$$d - 1 + (d - 1)^2 + 1 = 1.$$

$$\therefore d - 1 + d^2 - 2d + 1 = 1,$$

$$\therefore d^2 - d = 1,$$

$$\therefore d + 1 = d^2, \quad \text{откуда видно, что}$$

$$d = \varphi, \quad \text{или} \quad 1{,}618 \ldots$$

$$\therefore x = \varphi - 1.$$

92. Толщина покрова чуть превышает 2 фута [точнее, равна $(1+\sqrt{2})\cdot{}^5/_6$ фута]. На рис. 214 показан поперечный разрез крыши снежного покрова, который толще справа (на западном скате), чем слева (на восточном скате), где толщина равна ${}^5/_6$ фута. Направление снегопада (пунктирная линия), очевидно, делит пополам угол между скатом крыши и грунтом, поскольку толщина покрова на этом скате равна толщине покрова на земле. Так как оба ската расположены под

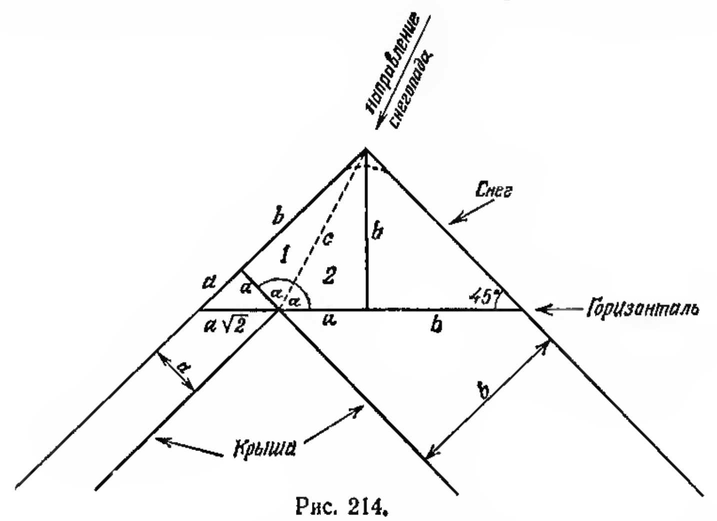


Рис. 214.

углом 45° к земле, мы можем ввести указанные на рис. 214 обозначения (a — толщина снежного покрова на восточном скате, равная ${}^5/_6$ фута, b — толщина снежного покрова на западном скате). Поскольку отрезок c является биссектрисой угла 2α, треугольники *1* и *2* конгруэнтны.

Отсюда ясно, что $a\sqrt{2}+a=b$; и если $a={}^5/_6$ фута, то $b=(\sqrt{2}+1)\cdot{}^5/_6$. (Даже если бы ветер не дул с запада, мы пришли бы к тому же самому результату, рассматривая только его западную составляющую.)

93. У чертежника был лист бумаги в линейку. Он мог поставить ножку циркуля в любую точку C на любой линии, например на линии, обозначенной цифрой *1*

(рис. 215), а раствор взять равным расстоянию до прямой 3 (расстояние CD) и провести окружиость. Эта окружность касается прямой 3 в точке D, а прямой 5 в точке G и пересекает прямую 2 в точках A и E, а прямую 4 — в точках B и F. Точки A, D, E, F, G и B — это и есть искомые вершииы правильного шестиугольника.

Доказательство. Радиус $AC = BC = AB = DC$; следовательно, треугольиик ABC — равиосторонний. По

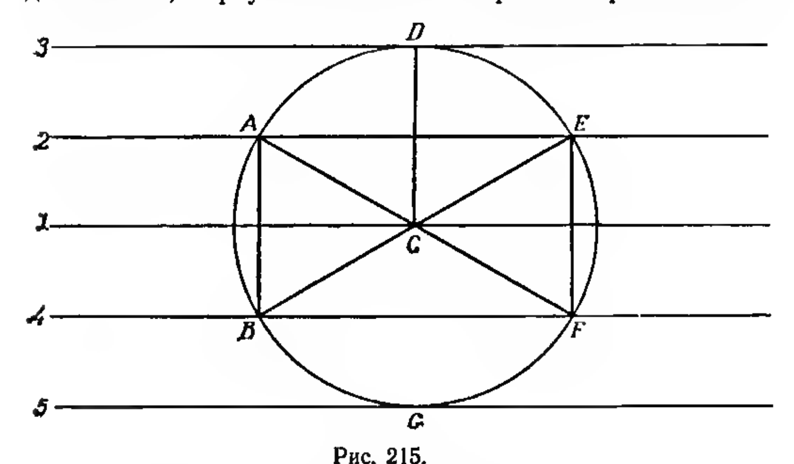


Рис. 215.

той же причиие равносторонними будут треугольник EFC и треугольник ABC. Зиачит, A, E, F и B — вершииы шестиугольиика, а в силу симметрии середииы дуг AE и FB точки D и G также являются вершинами правильиого шестиугольника.

94. Модель представляет собой три слегка искажеиные смежные граии куба, одиако *поверхность*, иа которую следует смотреть,— это внутренняя сторона такой модели (рис. 216, *а*).

Ортогональная проекция куба со стороны вершины представляет собой правильиый шестиугольник с тремя радиальными отрезками, выходящими из этой вершины A (рис. 216, *б*). Заметим, что ту же самую проекцию можно было бы получить и так. Удалим три грани куба, примыкающие к вершине A. Тогда, повериув

оставшиеся три грани вокруг оси (луча зрения) на 60° и ортогонально их спроектировав, мы и получим рис. 216, *б*, только место ближайшей точки *A* займет теперь наиболее удаленная точка *E*. (На рис. 216, *в* показано, что три радиальные ребра куба, видимые под этим углом, действительно следует повернуть на угол

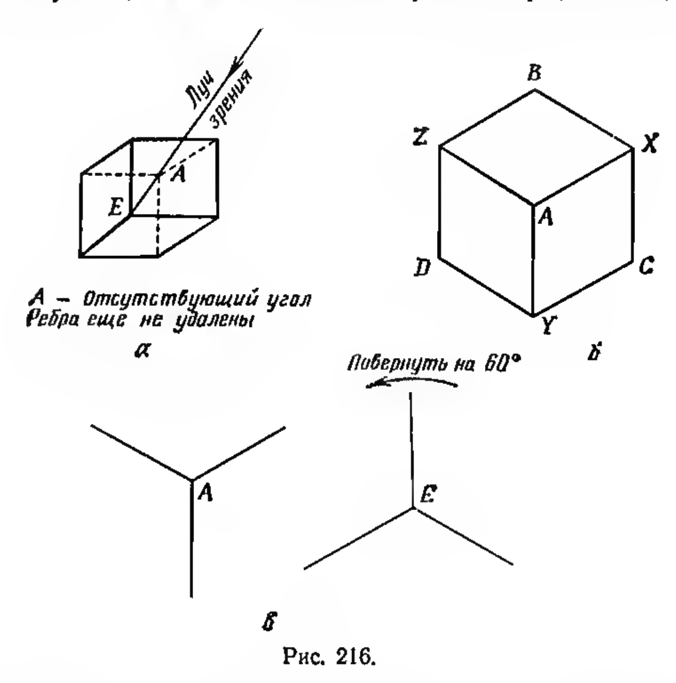


Рис. 216.

60°, дабы они заняли положение, соответствующее рис. 216, *б*.)

Перспективная проекция не столь двусмысленна; пунктирные линии на рис. 217, *а* показывают, как при таком проектировании углы *B*, *C* и *D* втянутся по направлению к центру *A*. Если мы спроектируем таким же образом нашу модель, состоящую из трех граней (рис. 216, *а*), совершив предварительно поворот на 60°, в результате чего ребра AX', AY' и AZ' совместятся с ребрами рис. 217, *а*, то углы X', Y' и Z' втянутся внутрь (рис. 217, *б*). Если мы теперь спроектируем пунктирные линии из рис. 217, *а* на рис. 217, *б*, а затем

разрежем фигуру вдоль их проекций, то мы получим при этом рис 217, *в*, который выглядит, как вид с угла на некоторый (выпуклый) куб, что и требовалось. Отметим, что мы воспользовались тремя радиальными ребрами, которые выглядят теперь, как ребра *выпуклых* (а не вогнутых) граней, а центральная точка E, дальняя вершина куба, кажется нам теперь ближней вершиной. Поскольку проектируемые фигуры симметричны,

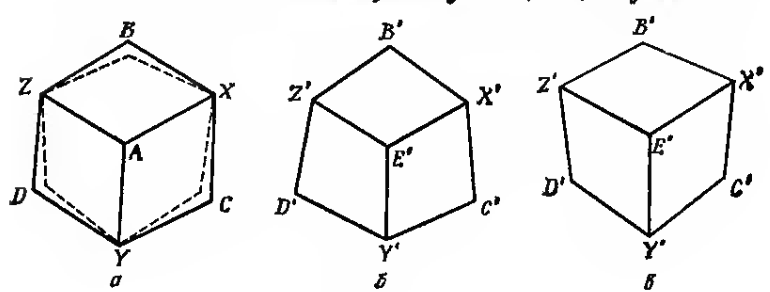


Рис. 217.

мы рассмотрим только одну грань $BXAZ$, которая выглядит, как верхняя грань полученного иллюзорного куба. На рис. 218 показан метод перспективного проектирования грани $BXAZ$ сверху и сбоку на $B'X'E'Z'$. ($\angle\alpha = \angle\alpha'$, поскольку это угол грани $B'X'A'Z'$ нашей модели, находящейся в положении, соответствующем EV, что приводит к виду на рис. 217, *б*.)

V — это центр проектирования, или точка, где расположен глаз наблюдателя, а разумное расстояние от объекта до этого центра равно 60 см. Сторона воображаемого куба с верхней гранью будет равна примерно 10 см. Все, что нам действительно нужно выбрать,— это величину диагонали AB с центром P (совпадающим в проекции с Z). Затем мы чертим на картоне четырехугольник $B'X'E'Z'$ с прямым углом $X'E'Z'$, вырезаем три куска такого размера и формы и соединяем их, как показано на рис. 219. Когда мы соединим два ребра $Z'E$ между собою, то получим три смежные грани рис. 216, *а*, только с измененным (искаженным) внешним краем.

Не стоит вырезать всю фигуру в виде одного куска картона, имеющего форму, указанную на рис. 219, по-

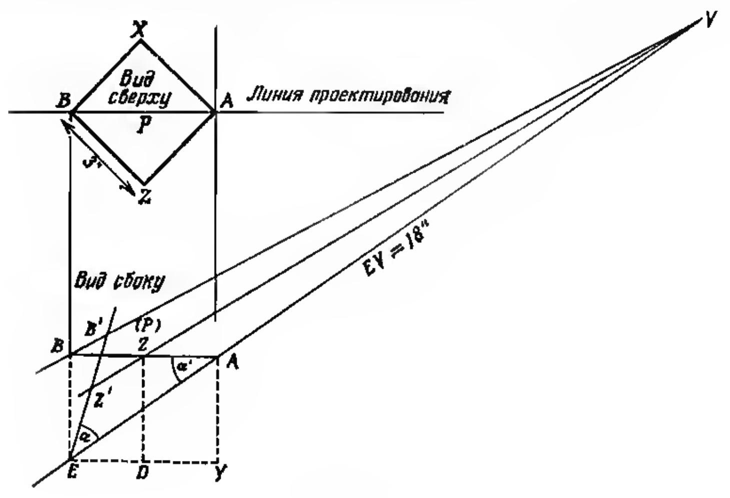


Рис. 218.

скольку сгибы картонного листа не будут очень четкими. Соедините лучше три отдельных куска с обратной

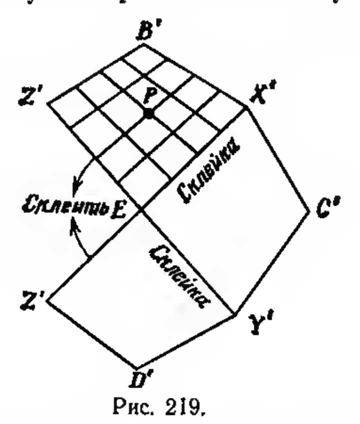


Рис. 219.

стороны клейкой лентой и зачерните внешние ребра, иначе они покажутся слишком светлыми (ведь они должны изображать *дальние* ребра иллюзорного куба).

Эффект усилится, если мы нанесем сетку пересекающихся прямых в подходящей перспективе по крайней мере на одной грани, как это сделано в случае верхней грани на рис. 219. Концевые точки этих прямых можно получить, сделав равностоящие отметки на AZB (рис. 218) и отметив их проекции на $E'Z'B'$, аналогично мы находим сами точки E', Z', B'. Используя эту сетку, мы можем нанести на соответствующую грань рисунок или надпись, изобразив его сперва на прямоугольной сетке, а затем перенося его точка за точкой на данную сетку.

Модель следует взять и держать совершенно неподвижно с закрытыми глазами. Затем откройте *один* глаз. Потом можно слегка повернуть модель; эффект окажется весьма странным. Лучше это проделать на улице, но не на солнце; в противном случае тени лягут на неправильных местах.

95. Поскольку ширина ступеней постоянна, пространство, занятое той частью лестницы, где она поворачивает, представляет собой квадрат, угол которого касается диагонали AB (рис. 220). Через середину M

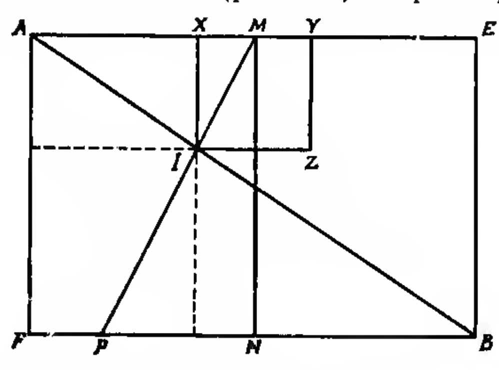


Рис. 220.

отрезка AE проведем прямую MN параллельно AF. Проведем MP так, чтобы $PN = \frac{1}{2}MN$; точка пересечения I и даст угол одной из двух равных кладовок, отмеченной пунктиром.

Доказательство. MN — прямая, соединяющая середину верхней стороны некоторого квадрата с половиной

PN его основания. Следовательно, прямая MP — это геометрическое место вершин квадратов, у которых середина верхней стороны расположена в точке M, таких, например, как искомый квадрат $XYZI$.

96. I. Расстояние до столба равно 16 м. Как видно на рис. 221, каждый пройденный отрезок представляет

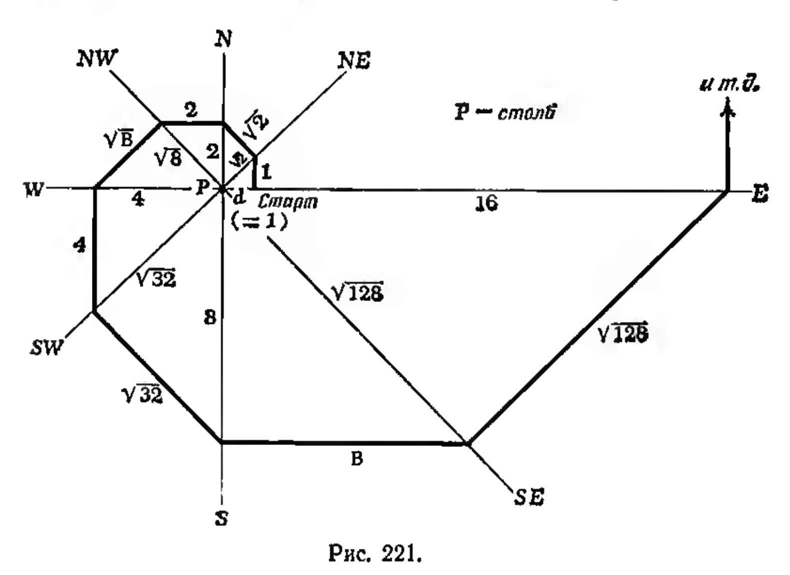


Рис. 221.

собой одну из равных сторон некоторого равнобедренного прямоугольного треугольника; а изучив внимательно рисунок, мы легко найдем общую формулу: $d=\sqrt{2^n}$. В нашем случае $n=8$, $2^8=256$; $\sqrt{256}=16$.

II. Следующие рассуждения легко понять, если начертить карту пути человека на бумаге в клетку (рис. 222). Сторона каждой клетки равна 1, а ее диагональ — $\sqrt{2}$. Сначала человек проходит одну сторону клетки, а затем одну диагональ; затем он проходит две такие стороны и две диагонали; далее — 4 стороны и 4 диагонали и т. д. Таким образом, в случае четного n расстояние до столба $d=2^{n/2}$, а в случае нечетного n $d=(n-1)\sqrt{2}$. В первом случае человек находит нужную целую степень двойки; во втором, или нечетном,

случае ему нужно лишь запомнить выражение $\sqrt{2}$ (= 1,4142 ...) с той точностью, с которой оно приводится в таблицах, и умножить на него число пройденных отрезков минус 1. Последняя формула годится

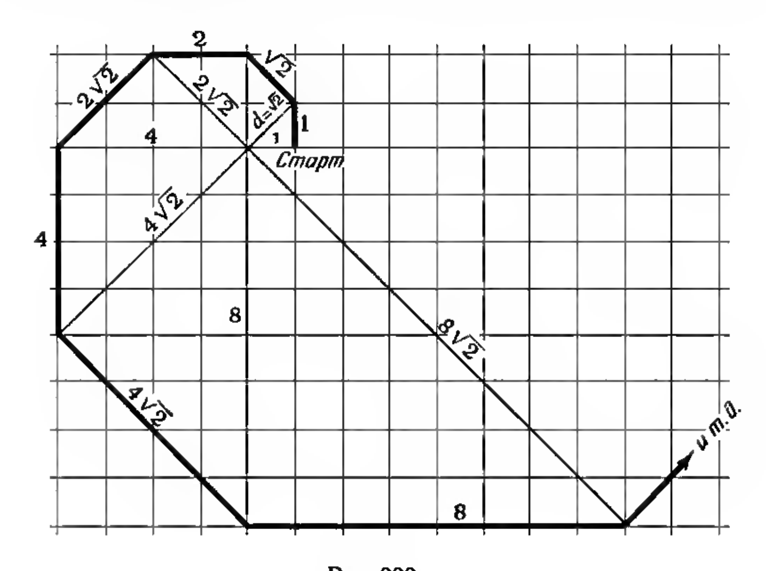


Рис. 222.

и для четного n, но нужный результат нельзя получить без помощи таблиц (или феноменальной памяти)[1].

97. Если ширина помещения $w = 1$, то его длина l удовлетворяет уравнению $l = l^3 - 1$ (откуда $l \approx 1{,}325$).

Все углы, обозначенные через α (рис. 223), являются дополнительными к углу β.

Из подобия треугольников *1* и *2* следует, что

$$\frac{c}{a} = \frac{a}{b}; \qquad \therefore c = \frac{a^2}{b}.$$

---

[1] Впрочем, ни одна таблица и никакая феноменальная память не дадут точного результата, поскольку, для того чтобы его получить, нужно знать все знаки в бесконечном непериодическом разложении числа $\sqrt{2}$. — *Прим. перев.*

Из подобия треугольников 2 и 3 следует, что

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{a+c}; \quad \therefore a^2+ac=b^2,$$
$$\therefore ac=b^2-a^2.$$

Подставляя сюда найденное выше выражение для c, мы получим

$$\frac{a^3}{b}=b^2-a^2; \quad \therefore a^3=b^3-a^2b,$$
$$\therefore a^2b=b^3-a^3.$$

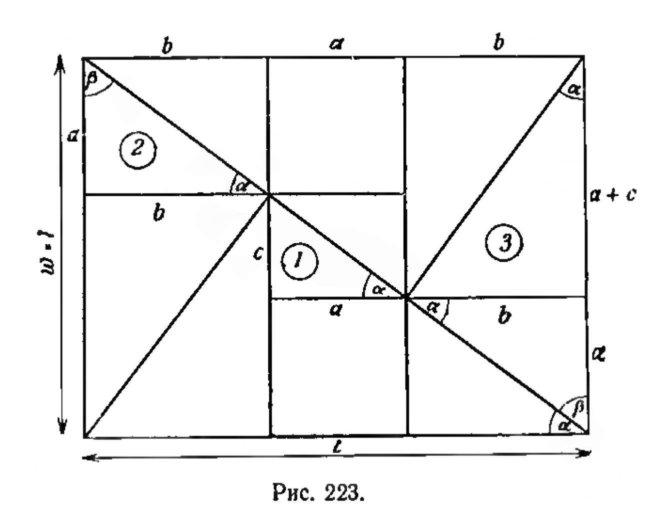


Рис. 223.

Разделим обе части этого равенства на a^3:

$$\frac{b}{a}=\left(\frac{b}{a}\right)^3-1.$$

Из подобия треугольников следует, что

$$\frac{1}{w}=\frac{b}{a}, \quad \text{но} \quad w=1,$$
$$\therefore l=\frac{b}{a},$$
$$\therefore l=l^3-1.$$

98. Любые два параллельных равносторонних треугольника, вершины которых совпадают с вершинами куба, делят внутреннюю диагональ куба, им перпендикулярную, на три равные части.

Доказательство. Мы воспользуемся ортогональной проекцией куба, изображенного на рис. 224, *а*, с такого направления, при котором луч зрения оказывается параллельным диагоналям AC и EG. Два упомянутых

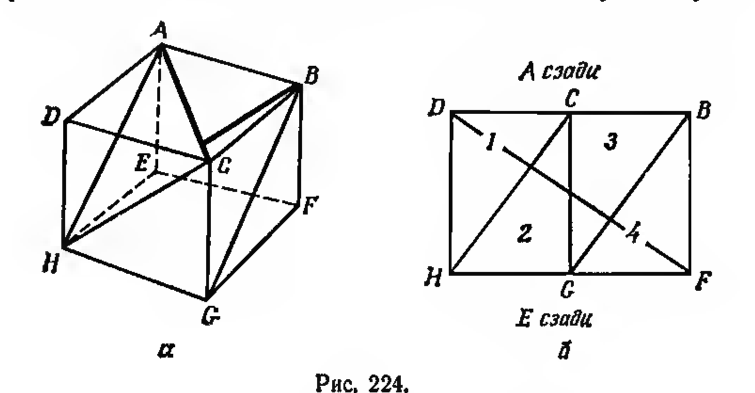


Рис. 224.

выше треугольника — это $\triangle ACH$ и $\triangle BGE$, а ортогональная проекция куба изображена на рис. 224, *б* с теми же обозначениями и с тремя дополнительными прямыми.

Поскольку все ребра равны я все углы, за исключением углов, образованных диагоналями, прямые, в силу симметрии все четыре треугольника, обозначенные *1*, *2*, *3* и *4*, конгруэнтны. Следовательно, их высоты равны и диагональ FD разбивается параллельными прямыми CH и BG на три равные части.

99. I. Двугранный угол равен 90°.

II. В результате продолжения плоскостей получится куб.

Ответ на первый вопрос легче всего получить, если сначала ответить на второй вопрос. Представим себе центрально-симметричный (плоский) шестиугольник, который разбивает некоторый куб на две равные части (рис. 225, *а*). Его вершины совпадают с отмеченными цифрами серединами ребер куба. Следовательно, эти

середины можно соединить с вершинами A и B нашего куба отрезками равной длины. Эти отрезки образуют 12 ребер полуправильного двенадцатигранника, все треугольные грани которого конгруэнтны; его остальные 6 ребер образуют стороны правильного шестиугольника. (На рис. 225, *а* заштрихованные треугольники на задних гранях приблизительны. Плоскость шестиугольника не изображена.) На рис. 225, *б* изображена

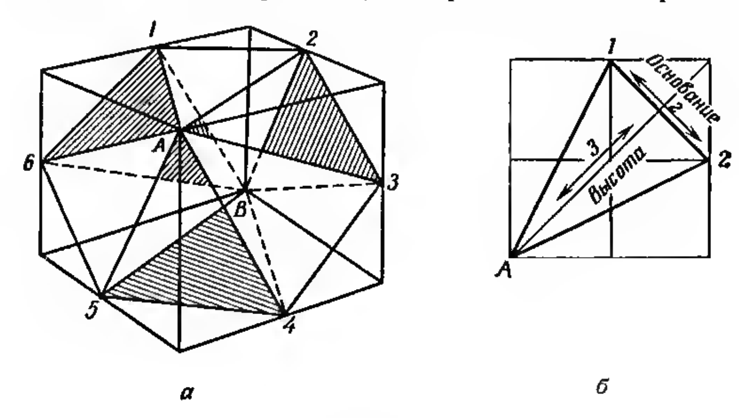


Рис. 225.

одна из граней 12-гранника, расположенная на грани куба. Ее высота в полтора раза превышает ее основание, что позволяет нам идентифицировать нашу модель с рассматриваемым в условии задачи многогранником. Так как у этого многогранника чередующиеся грани являются частями граней куба, то они, следовательно, образуют между собой двугранные углы, равные 90°.

100. Проведем, как показано на рис. 226, дополнительные прямые; здесь O — это центр шестиугольника, IJ и HK — перпендикулярны соответственно EG и GF и делят эти отрезки пополам. В силу симметрии $IH = 3$, $BG = CG = 2$. Расширим треугольники AEB и CFD так, чтобы образовались бо́льшие треугольники AEG и DFG. После того как, согнув картон по AG и DG, мы совместим E и F, стороны EG и FG совпадут, а точка J совпадет с K, в результате чего образуется новый треугольник $I(JK)H$. Если мы теперь, изменив масштаб,

примем длину $IG (= HG = IE = FH)$ за 1, то окажется, что $JI = KH = \sqrt{2}/2$; следовательно, в новом треугольнике угол $I(JK)H$ — прямой. Поскольку IJ и KH перпендикулярны общему ребру двух исследуемых треугольников, двугранный угол, ими образованный,— пря-

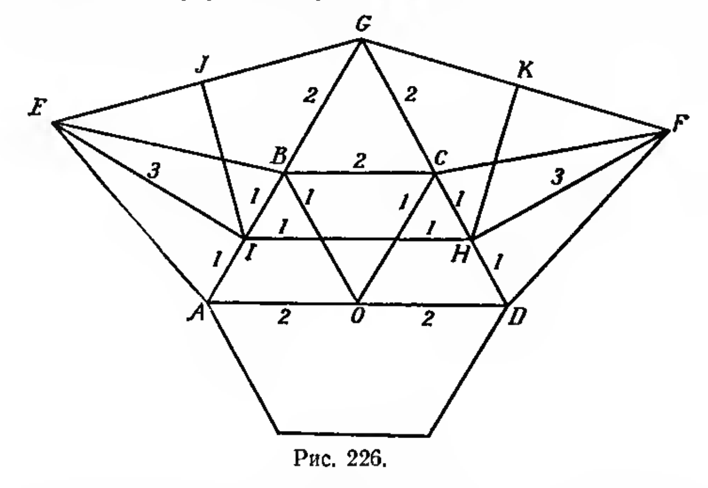


Рис. 226.

мой, и, следовательно, двугранный угол, образованный $\triangle AEB$ и $\triangle CFD$, также прямой.

101. Если ширина клина w равна 1, то длина $l = \sqrt{2}$ а высота $h = \sqrt{2}/3$ (рис. 227).

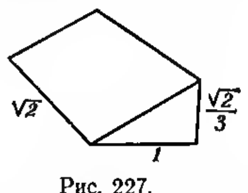


Рис. 227.

Мы начнем с метода миссис Г. На рис. 228 схематически изображено поперечное сечение клина с разрезами. Косые грани попарно подходят друг к другу, поэтому число слоев всегда четно. Если бы число слоев равнялось двум (один разрез), то плоское основание не изменилось бы, но миссис Г. сказала, что размеры

клиньев меньше размеров куска хлеба, так что число слоев должно быть больше двух. Можно заметить, что в случае четырех слоев w удваивается. Более того, если обозначить через n число слоев, а через x — общую ширину сложенных друг с другом кусочков (которые, по условию, образуют один ряд), то $x = nw/2$. В случае четырех слоев, если нужно сохранить прежние пропорции, миссис Г. должна это сделать, поменяв места-

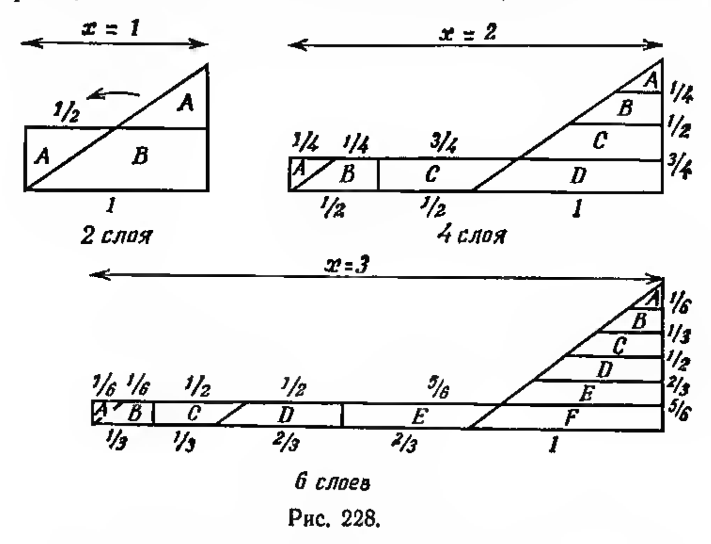


Рис. 228.

ми l и w (рис. 229). Тогда мы получим, что $w = 1$, $l = 2/l$, $\therefore l^2 = 2$, или $l = \sqrt{2}$. Значит, размеры куска хлеба относятся друг к другу, как $\sqrt{2}$ к 2 $(2 : \sqrt{2} = \sqrt{2})$, что, как мы видим, не является необычными пропорциями для куска хлеба.

Если бы миссис Г. сделала 6 слоев ($x = 3$ на рис. 228), то аналогичное соотношение для неизменных пропорций привело бы к $l = \sqrt{3}$. Однако, как это можно усмотреть из рис. 230, *а*, последнее предположение привело бы к необычно длинному куску хлеба. И чем большим мы взяли бы n, тем менее походили бы пропорции куска хлеба на обычные; следовательно, миссис Г. сделала 4 слоя и плоские размеры клиньев сыра относились, как $1 : \sqrt{2}$.

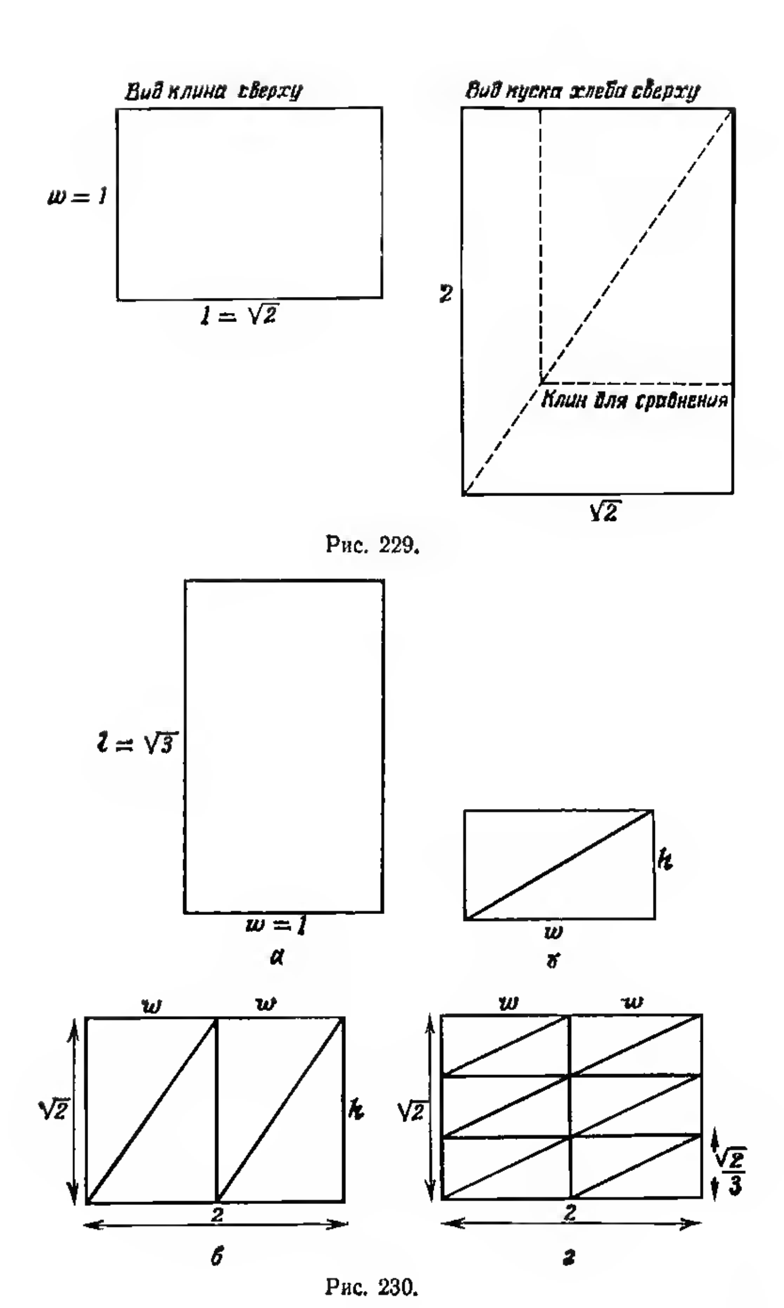


Рис. 229.

Рис. 230.

Для того чтобы определить высоту *h* клиньев, мы вернемся к методу миссис В.: здесь вновь слои должны распадаться на пары (рис. 230, *б*). Поскольку размеры куска хлеба относятся, как $\sqrt{2}:2$, она должна разместить свои кусочки по крайней мере в два ряда (рис. 230, *в*); но она, согласно словам миссис Г., сделала почти в четыре раза больше разрезов, чем сама миссис Г. Поэтому расположение кусочков должно быть таким, как на рис. 230, *г*, то есть слоев *12*, а разрезов 11, что почти в 4 раза больше трех разрезов. Очевидно, что в случае миссис В. число слоев должно быть кратно 4, а для 8 слоев потребуется только 7 разрезов. Отсюда мы видим, что толщина ее слоев должна равняться $l/12$, а поскольку обе леди имеют дело с одинаковыми объемами сыра, $h={}^4/_{12}l$, или $\sqrt{2}/3$.

Мы должны быть благодарны миссис Г. за то, что она не расположила свои слои более чем в один ряд, ибо это привело бы к удручающему усложнению задачи.

102. Стаканов было 129.

Обычная, наиболее эффективная процедура состоит в том, чтобы исследовать сразу половину стаканов, затем половину стаканов из той группы, где обнаружен яд, затем половину от половины и т. д. до тех пор, пока мы не найдем нужный стакан. Таким образом, степени 2 дают нам первый ключ: для двух стаканов потребуется одна проверка, для трех или четырех — две проверки; для пяти или шести — три проверки и т. д. Число 128 — это единственная степень двойки, расположенная между 100 и 200, так что для 129 и большего числа стаканов нам потребуется 8 испытаний. Точнее говоря, нам *могло* бы потребоваться 8, но, проверив сначала 1 стакан, мы оставим себе 7 испытаний для оставшихся 128 стаканов, что дает ту же оценку 8 для максимального числа испытаний.

В действительности в случае первой процедуры математическое ожидание числа испытаний равно 7,0155..., в то время как во втором случае оно равно 7,9457... . Так что, прибегая ко второй процедуре, мы «растрачиваем» 0,930... испытания («не полностью одно» испытание, как сказал профессор). (Его риск оправдался, ибо именно первый стакан оказался отравленным, что укрепило доверие работников лаборатории

к ученому настолько, что во всех дальнейших случаях он мог действовать, как считал нужным.)

103. I. Сплошными линиями (рис. 231) показан исходный прямоугольник. Судзи с помощью двух складок нашла центр прямоугольника O, а затем нашла точки, отделяющие от его нижней стороны соответственно $^1/_4$ (первая складка показывала середину нижней стороны), $^1/_8$, $^1/_{16}$ и $^1/_{32}$. Затем сложила прямоугольник вдоль

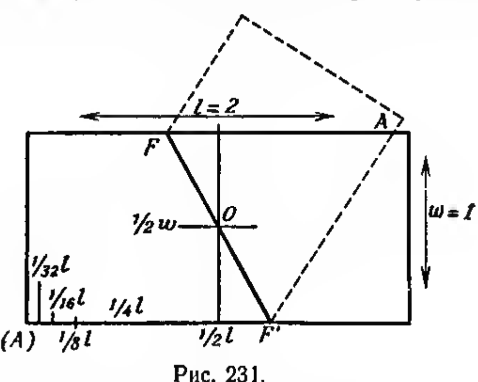


Рис. 231.

прямой FF', проходящей через O так, чтобы отметка, соответствующая $^1/_{32}$, оказалась на верхней стороне прямоугольника. (Точка O позже используется для нахождения центра искомого максимального круга). Пунктирные линии показывают новое положение загнутой части.

Доказательство. Рис. 232 учитывает заданные пропорции; однако мы пренебрегаем тем, что длина прямоугольника равна 2, и обозначим ее через l. Точка O — это центр несложенного прямоугольника, а после складывания получается фигура, симметричная относительно отрезка AO, перпендикулярного складке FF'. Точка D — это центр искомого круга, касающегося FF' в точке O, а боковых сторон прямоугольника $A'E$ (здесь рассматривается только одна сторона, поскольку фигура симметрична) в точке C' и проходящего через точку A пересечения длинных сторон прямоугольника.

DC' перпендикулярен $A'E$; проведем OB' перпендикулярно $A'E$ и, следовательно, параллельно DC' и FE.

Точка O — середина FE', следовательио, B' — середииа $A'E$. Соедииим прямой точку A и точку B пересечеиия OB' с искомой окружностью. Тогда $\angle ABO$ прямой, поскольку он опирается иа диаметр; следовательио, AB параллельно $A'B'$. Проведем отрезок BD; поскольку

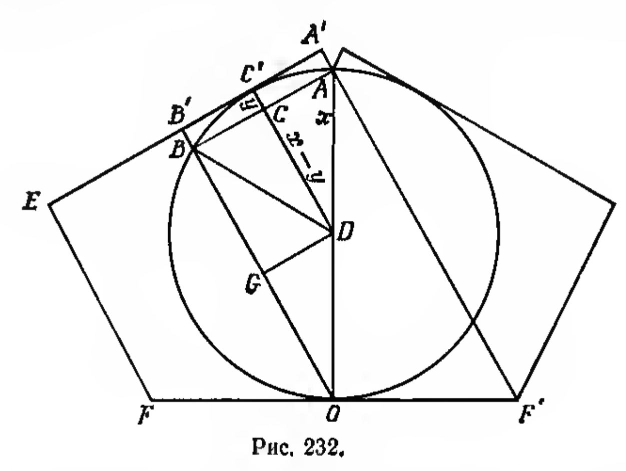


Рис. 232.

$\angle ACD$ прямой, $AC = CB$; следовательно, $AC = 1/4$. Проведем DC перпендикуляриo OB; тогда $OG = BG = CD$. $B'O = l/2$.

$$x = \text{радиусу } AD, \quad \text{а} \quad y = l/2 - 2BG.$$

$$BG = CD = x - y;$$

$$\therefore y - \frac{l}{2} - 2x + 2y,$$

$$\therefore y = 2x - \frac{l}{2} \quad \text{или} \quad 2x - y = \frac{l}{2}. \qquad (1)$$

У прямоугольного треугольника ACD стороны равны x, $x-y$ и $1/4$;

$$\therefore x^2 = x^2 - 2xy + y^2 + \frac{1}{16},$$

$$\therefore 2xy - y^2 = \frac{1}{16}. \qquad (2)$$

Умножим обе части уравнения (1) на y:

$$2xy - y^2 = y\,\frac{l}{2},$$

тогда из равенства (2) мы получим

$$\frac{yl}{2}=\frac{1}{16},$$

$$y=\frac{1}{8}l.$$

Именно это значение вычислила Судзи для AA' при $l=2$; $AA'={}^1/_{16}$. Радиус покрытого круга $=l/4+y/2$, что на $^1/_{32}$ больше радиуса круга, покрытого несложенной бумагой.

II. Пределы, в которых можно изменять длину прямоугольника, равны соответственно

$$l_1=\frac{1}{4-2\sqrt{3}} \quad \text{и} \quad l_2=\frac{1}{6-2\sqrt{8}}.$$

Нижняя граница, l_1, достигается, когда диаметр искомого круга равен 1, то есть ширине бумаги, иными словами, когда складывание не дает никаких преимуществ. Верхняя граница, l_2, отвечающая наибольшим преимуществам, достигается, когда круг касается длинных сторон прямоугольного листа бумаги. Любое дальнейшее увеличение l_2 приведет, как показывает описанный выше метод, к кругу, который не будет полностью покрыт.

В первом случае (рис. 233, *a*) $x=w/2$, или $^1/_2$, так что в $\triangle ADC$, $DA={}^2/_4$ и $AC={}^1/_4$;

$$\therefore DC=\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{2}-y; \quad y=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{2-\sqrt{3}}{4};$$

$$y=\frac{1}{8}l,$$

$$\therefore l=\frac{1}{4-2\sqrt{3}}.$$

Верхняя граница (на рис. 233, *б* показана только левая половина чертежа) приводит к $x={}^3/_4$, поскольку $CE={}^3/_4$.

Значит, в $\triangle ADC$ $DA={}^3/_4$ и $AC={}^1/_4$;

$$\therefore DC=\frac{\sqrt{8}}{4}=\frac{3}{4}-y; \quad y=\frac{1}{8l};$$

$$\therefore \frac{3-\sqrt{8}}{4}=\frac{1}{8l};$$

$$\therefore l=\frac{1}{6-2\sqrt{8}}.$$

Несимметричное складывание, при котором FF' не проходит через точку O, дает в более узких пределах чуть бо́льшие значения для x; но оно слишком громоздко, чтобы обсуждать его в сборнике головоломок.

III. Этот треугольник — диофантов, то есть отношения его сторон выражаются рациональными числами, и, следовательно, при подходящем выборе масштаба длины сторон выражаются целыми числами. В нашем случае ($w = 1$, $l = 2$) стороны $\triangle ADC$ равны $^1/_4$, $x-y$ и x.

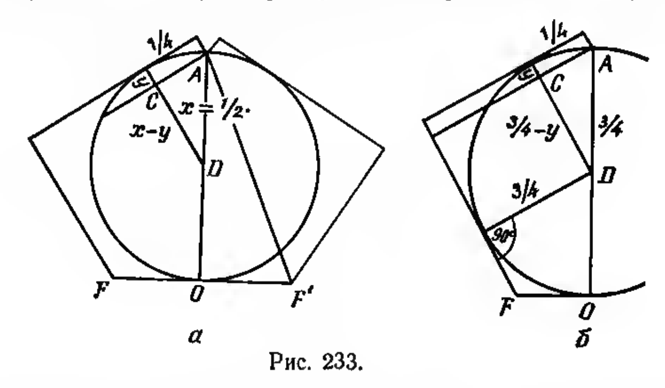


Рис. 233.

Поскольку $y = ^1/_{16}$, а $x = l/4 - y/2 = ^1/_2 - ^1/_{32}$, три стороны равны соответственно $^1/_4$, $^{17}/_{32} - ^1/_{16}$ и $^{17}/_{32}$. Приведя эти дроби к общему знаменателю, мы получим $^8/_{32}$, $^{15}/_{32}$ и $^{17}/_{32}$, а $8^2 - 15^2 = 17^2$. Если $l = w$, то длины сторон равны 3, 4 и 5. Поскольку в рациональном отношении w/l мы всегда можем принять w за 1, для сторон нашего треугольника получается следующая формула (l — рационально): l, $l^2 - ^1/_4$, $l^2 + ^1/_4$. Это представляет собой всего лишь иную версию более знакомого выражения: если n — нечетное число, то стороны равны соответственно

$$n, \quad \frac{1}{2}(n^2 - 1), \quad \frac{1}{2}(n^2 + 1);$$

если n — четное число, то стороны равны

$$n, \quad \left(\frac{n}{2}\right)^2 - 1, \quad \left(\frac{n}{2}\right)^2 + 1.$$

Этим способом любые пропорции прямоугольника, которые можно установить путем складывания (то есть

которые можно получить возможными делениями на части, в число которых входят все степени 2 и много других значений), позволяют отметить y на стороне прямоугольника и, следовательно, сложить оптимальную форму в пределах, приведенных выше для симметричного складывания.

104. На рис. 234, *а* складки перенумерованы по порядку, причем соответствующие цифры снабжены полукруглой стрелочкой. Складки *1*, *2* и *3* делят последовательно пополам боковую сторону прямоугольника, равную 1, ее половину и четверть; таким образом, $AC =$

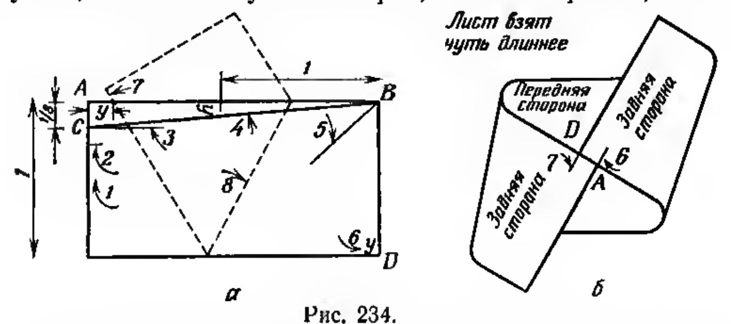


Рис. 234.

$= 1/8$. Складка *4* соединяет точку C и угол B (ее следует проводить очень точно). Складка *5* образуется, когда мы совмещаем боковую сторону BD с верхним основанием AB, что позволяет нам отметить с помощью складки *6* длину y на нижнем основании вблизи вершины D. С помощью некоторой изворотливости (рис. 234, *б*) длину y вблизи D удается перенести на верхнее основание в район точки A, используя складку *7*. Итоговая складка *8*, обозначенная пунктиром, получится, если мы наложим угол D на угол A так, чтобы при этом соприкоснулись складки *6* и *7*, а затем аккуратно прижмем верхнюю половину листа к нижней.

Доказательство. На рис. 234, *а* отрезок AB относится к AC ($1/8$), как 1 к y, в силу подобия треугольников. Следовательно,

$$\frac{l}{\frac{1}{8}} = \frac{1}{y}; \quad y = \frac{\frac{1}{8}}{y} = \frac{1}{8l},$$

что как раз и равно нужной величине, как доказано в головоломке 103.

Судзи объяснила Лилиан, что этот способ годится и для прямоугольников, которые короче нижней границы (даже для квадрата), но при этом мы не получаем преимуществ, связанных с размером покрываемого круга.

— Я не хочу приводить здесь все нужные выкладки,— сказала она.— Я ведь знаю, что ты не очень-то любишь математику.

— Математику — нет,— ответила Лилиан,— а вот математиков — да. Во всяком случае, мне нравится форма, которая получилась: так и кажется, что она расправит крылышки наподобие жука скарабея и, озабоченно жужжа, улетит прочь.

105. Человек наполнил стоящий на столе противень более чем наполовину, а затем осторожно приподнял один конец, вылив часть воды так, чтобы уровень воды

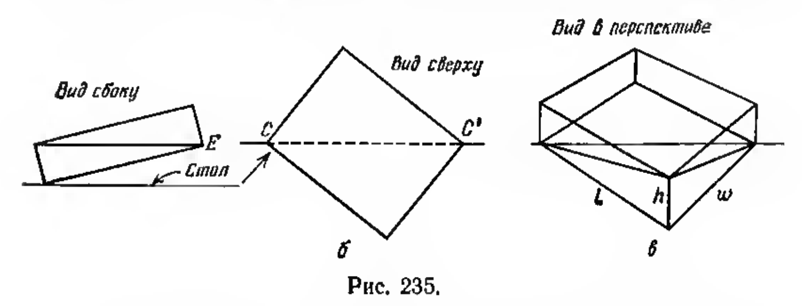


Рис. 235.

достиг отметки E (рис. 235, *а*), соответствующей нижнему краю поднятого конца. При этом в противне осталось ровно $^1/_2$ пинты, поскольку его незаполненная часть имеет те же размеры и форму, что и часть, заполненная водой.

У обычного кухонного стола есть прямой край. Наш человек сдвинул противень так, чтобы противоположные углы C и C' (рис. 235, *б*) оказались на краю, а затем он вновь стал наклонять противень, подставив чашу для вытекающей воды. Он наклонял противень до тех пор, пока уровень воды не достиг углов C и C'. К этому моменту в чаше оказалось ровно $^1/_3$ пинты.

Доказательство. Пропорции противия иесуществеииы. На рис. 235, *в* изображеи противеиь в последиий момеит всей процедуры. Оставшаяся в ием вода прииняла форму пирамиды, объем которой равеи произведеиию площади ее осиоваиия иа одиу треть высоты. В даииом случае площадь осиоваиия равиа $lw/2$, где l — длиииа, а w — шириииа противия. Следовательио, объем пирамиды равеи $lw/2 \times h/3 = lwh/6$ (h — высота пирамиды). Поскольку объем противия (1 пинта) $= lwh$, оставшаяся часть воды составляет $^1/_8$ пииты.

Следовательио, в чаше оказалось $^1/_2 - ^1/_6 = ^1/_3$ пинты.

106. В результате получится: одиа часть, две стороиы, три края (*1*, *2* и *3* иа рис. 236, *а*), ии одиого перекручиваиия с топологической точки зреиия, ибо перекручиваиия верхией части сводятся иа иет перекручиваииями в нижней части. Кроме того имеются две дыры.

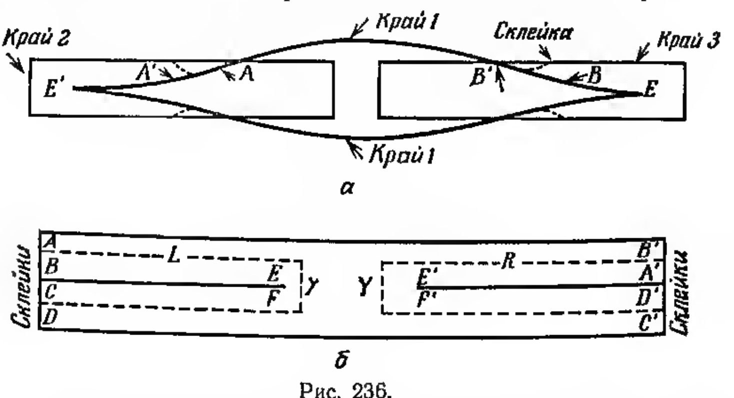


Рис. 236.

Ответ можио было предугадать (рис. 236, *б*), поскольку EB, иижиий край L, соедиияется с $B'A$, верхиим краем R и L, который соедииияется с $A'E'$, нижиим краем R. Тогда $EBB'AA'E'$ вместе составляют верхиюю половииу первого края (рис. 236, *а*). Нижняя часть первого края образована аиалогичио с помощью $FCC'DD'F'$.

Виутрений край, образоваииый разрезом X (пунктир), и виешиий край, сделаиный с помощью разреза Y, вместе образуют третий край (рис. 236, *а*); аиалогичио виешиий край X и виутреиий край Y образуют

второй край. Отсюда следует, что в итоге получатся три края. Проследив за склейками, мы замечаем, что в итоге остается всего одна часть.

Наконец, в каждом случае перекрученный элемент соединяется с другим элементом, перекрученным в противоположную сторону; следовательно, все перекручивания взаимно уничтожаются. Значит, перекручиваний (в топологическом смысле) не остается, а отсюда следует, что число сторон должно равняться двум, как и до всех разрезаний и соединений.

107. Первая строка получится, если мы умножим 9 цифр, взятых в их естественном порядке, на 3 и выпишем в каждом случае последнюю цифру произведения. Вторая строка получается аналогичным образом, только цифры умножаются не на 3, а на 7.

Если мы проделаем ту же операцию, выбрав в качестве множителей 1 и 9, то получим соответственно правильную и обратную последовательности цифр. В случае других множителей получаются не все цифры, а некоторые из них повторяются и, кроме того, появляется 0.

Множители	Конечные цифры[1]								
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	0	2	4	6	8
3	3	6	9	2	5	8	1	4	7
4	4	8	2	6	0	4	8	2	6
5	5	0	5	0	5	0	5	0	5
6	6	2	8	4	0	6	2	8	4
7	7	4	1	8	5	2	9	6	3
8	8	6	4	2	0	8	6	4	2
9	9	8	7	6	5	4	3	2	1

108. На рис. 237, *а* показан путь, следуя которому мы можем попытаться решить задачу. Периметр фигуры равен $4s$, а площадь уменьшена до $^5/_9 s^2$. Но если мы попытаемся улучшить фигуру, уменьшая длины сторон и одновременно увеличивая их число (рис. 237, *б*), то можно заметить, что предельная площадь равна $^1/_2 s^2$.

---

[1] Операция X переводит первую и последнюю строку в себя. Стоит заметить, что в этой колонке расположение цифр напоминает магический квадрат: в каждой строке и столбце с одинаковыми номерами стоят одинаковые последовательности цифр.

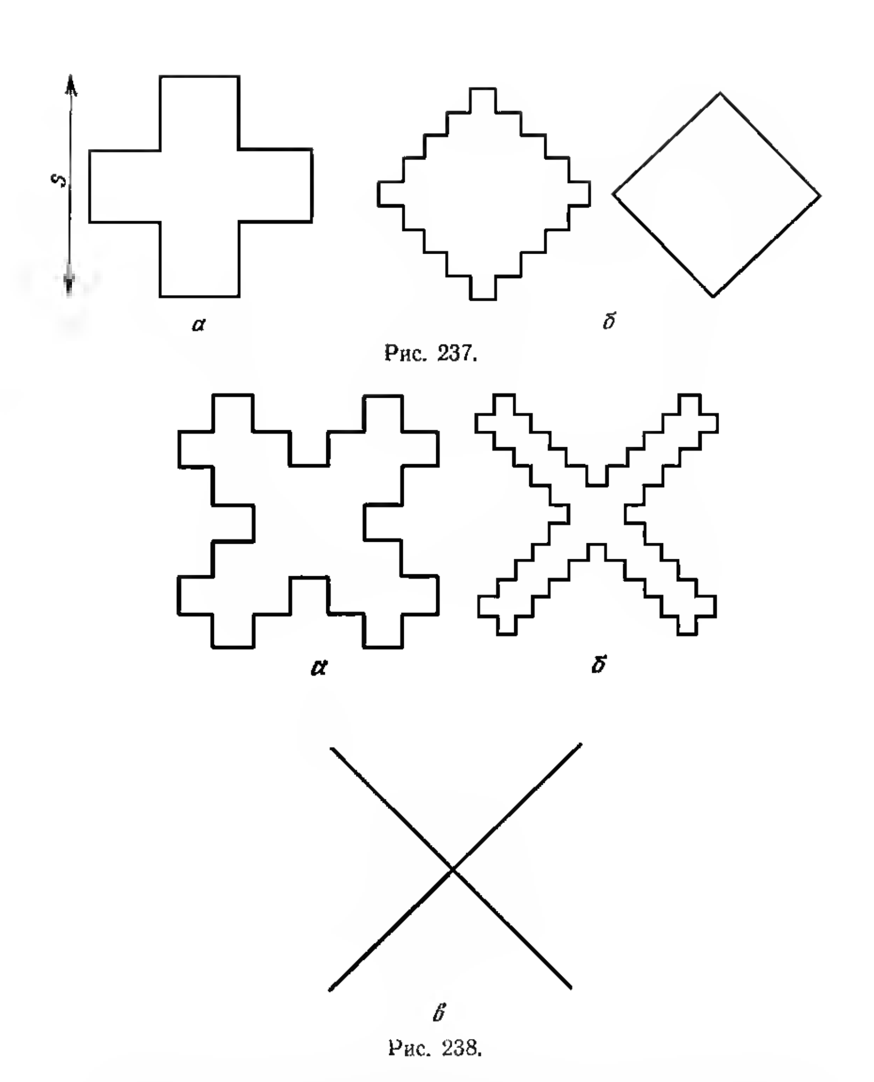


Рис. 237.

Рис. 238.

Одно из решеиий[1] (существуют и другие, более сложные решения) представлеио иа рис. 238, *а*. На рис. 238, *б* представлено дальиейшее развитие даииого метода, а иа рис. 238, *в* показан предельиый случай

[1] Точнее говоря, первый шаг, приводящий к решению. — *Прим. перев.*

с нулевой площадью. В этом последнем случае длины отрезков следует уменьшить в нужное число раз, дабы периметр оказался равным заданной величине, а именно: суммарная длина двух прямых, изображенных на рис. 238, *в*, должна равняться половине периметра квадрата, ибо длина каждого отрезка этих прямых считается дважды из-за того, что этот отрезок представляет собой предельный случай двух «зубчатых» отрезков (ср. с рис. 238, *б*), теперь уже имеющих «бесконечно большое число бесконечно малых зубцов». С топологической точки зрения все описанные выше решения образуют открытое множество, поскольку *предельное* решение (рис. 238, *в*) нам не подходит, так как стороны накладываются друг на друга (расстояние между ними становится равным нулю). Это обстоятельство, однако, не влияет на ответ [1].

109. Одно множество, удовлетворяющее очевидным образом условию задачи, состоит из точек пересечения окружности E (рис. 239) с другими фигурами. Второе множество образовано точками A, B, C и D.

Доказательство. Углы A и C — прямые. Проведем теперь отрезок DB, который рассмотрим как диаметр некоего воображаемого круга. Любые точки, подобные A и C, то есть являющиеся вершинами прямых углов, опирающихся на диаметр, принадлежат соответствующей окружности.

110. Достаточно взять такое количество молока, чтобы высота его уровня (в ненаклоненном положении) оказалась равной половине ширины пакета или меньшей; $\alpha = 45°$. Это справедливо при любых пропорциях пакета, если его высота h больше ширины w. Если же $h = w$, то количество молока не влияет на угол α.

Доказательство. На рис. 240 пакет наклонен под углом $\alpha = 45°$. C — середина пунктирной прямой, параллельной основанию AB и удаленной от AB на расстояние

[1] Точный смысл этих (не рассчитанных на математика!) рассуждений автора таков. Данная задача (в формулировке автора) решения не имеет, ибо существуют фигуры, удовлетворяющие условию задачи и сколь угодно малой площади (разумеется, не существует такой фигуры нулевой площади). В решении фактически показывается, как построить нужную фигуру сколь угодно малой площади — *Прим. перев.*

Рис. 239.

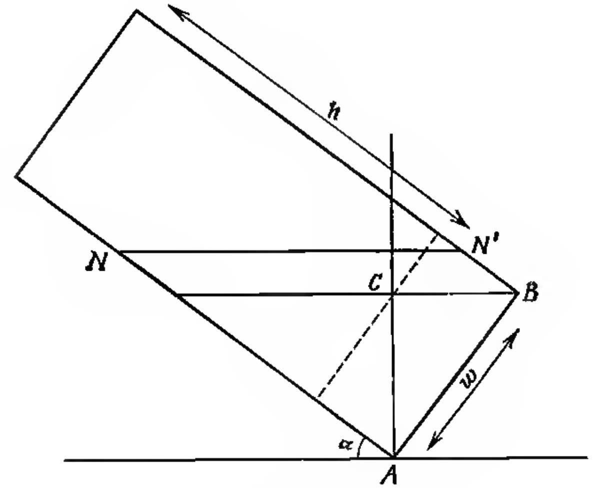


Рис. 240.

$^1/_2 w$. Если пакет наклонить, то уровень молока будет по-прежнему проходить через C, а когда угол наклона станет равен 45°, уровень пройдет и через точку B. Из соображений симметрии ясно, что при этом пакет окажется в состоянии неустойчивого равновесия (мы пренебрегаем весом картона). Если добавить еще молока до уровня NN', то центр тяжести сместится влево от вертикальной оси AC и пакет упадет. Если же, напротив, мы *уменьшим* количество молока, то центр тяжести останется на этой оси.

Если $h = w$, то пакет может быть полным, частично полным или полностью пустым; в любом случае угол α останется равным 45°. Если $h < w$, то любое количество молока, меньшее максимального, уменьшит угол α.

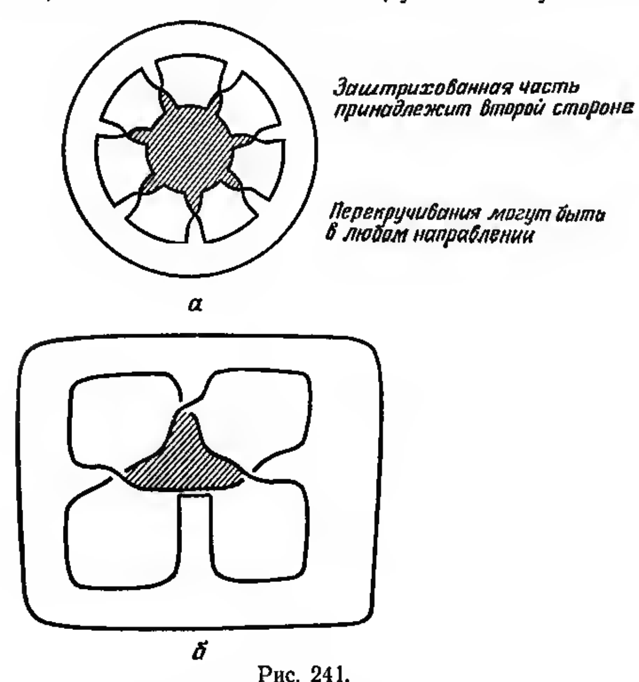


Рис. 241.

111. См. рис. 241. Число краев можно подсчитать, проследив взглядом за каждым из них. Правило состоит в том, что число дыр следует взять любым нечетным. На рис. 241, *б* показана незаконченная модель с

тремя дырами и незаконченной четвертой дырой, которая получится, если мы присоединим свободный конец к части x. Если мы присоединим его, не перекручивая, то получим 4 дыры и 2 края, но только одну сторону. Если же мы предварительно его перекрутим, то получим 2 стороны и 4 дыры, но целых 3 края. Аналогичная ситуация возникает и при любом другом четном числе дыр.

112. Сначала докажем, что, загибая, как указано, уголки, мы получим прямоугольник. На рис. 242, *а*

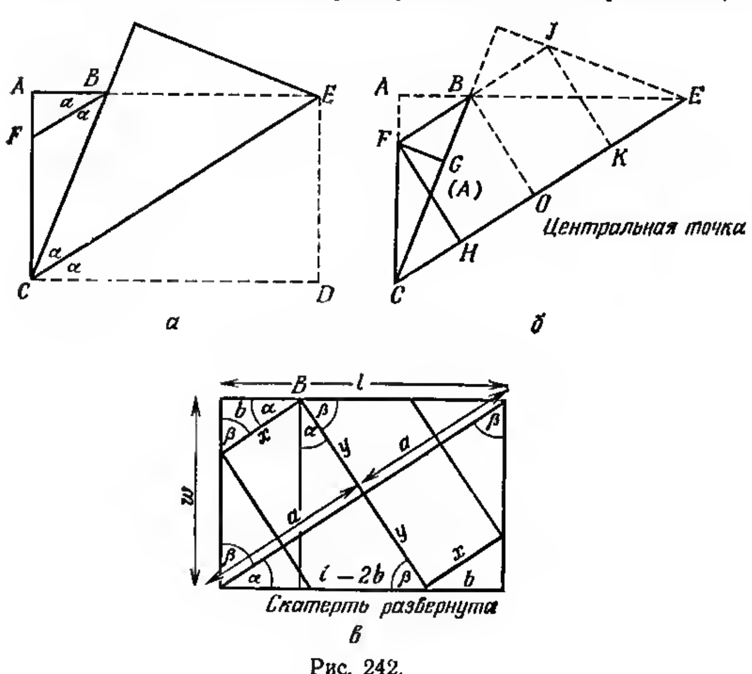


Рис. 242.

$\angle BCE = \angle ECD$. Поскольку AB после загибания ляжет на CB, отрезок FB служит биссектрисой $\angle ABC$, который равен $\angle BCD$;

$$\therefore FB \parallel CE.$$

На рис. 242, *б* G — новое положение точки A; $\angle FGB = 90°$. Затем мы загибаем угол C так, что CF

попадет на FG; следовательно, складка FH служит биссектрисой $\angle CFG$. $\angle HFG = {}^1/_2 \angle CFG$, а $\angle BFG = {}^1/_2 \angle AFG$;

$$\therefore \angle BFH = 90°.$$

В силу симметрии $\angle FJK = 90°$.

$$\therefore FJKH \text{ — прямоугольник.}$$

(А значит, CH после сгибания попадет на OH.)

Обозначим длину и ширину скатерти соответственно через l и w, а отношение сторон итогового прямоугольника через $R = 2x/y$ (рис. 242, *в*). Проведем через точку B прямую, параллельную сторонам (w), и отметим углы, равные α и β, где α — тот же угол, что и на рис. 242, *a*, а β — дополнительный к нему угол. (То, что отмеченные на рис. 242, *a* углы равны α и β, уже доказано или очевидно.) Далее, из подобия треугольников

$$\frac{2y}{w} = \frac{2a}{l}; \quad \therefore a = \frac{ly}{w}.$$

Точно так же

$$\frac{2y}{l-2b} = \frac{2a}{w} = \frac{2ly}{w^2}; \quad \therefore l - 2b = \frac{w^2}{l}.$$

Из подобия треугольников вытекает также, что

$$\frac{x}{b} = \frac{2y}{w}; \quad \therefore b = \frac{xw}{2y}.$$

Поскольку $R = 2x/y$, $x = Ry/2$; подставляя в предыдущее отношение вместо x $Ry/2$, получаем

$$b = \frac{Rw}{4}, \quad \therefore l - \frac{Rw}{2} = \frac{w^2}{l}; \quad \therefore l - \frac{w^2}{l} = \frac{Rw}{2}.$$

Поэтому при $w = 1$ $R = 2l - 2/l$.

Пользуясь этим выражением для R, мы уже можем ответить на все интересующие нас вопросы. Сначала обратимся к красной скатерти. Профессор сказал, что ее пропорции такие же, как и у полученного из нее прямоугольника. Это означает, что

$$R = l, \quad \text{но тогда} \quad l = \frac{2l^2 - 2}{l} \quad \text{и} \quad l^2 = 2l^2 - 2,$$

$$\text{или} \quad l = \sqrt{2}.$$

Теперь займемся «золотой скатертью». Золотое сечение $\varphi = (\sqrt{5} + 1)/2$, однако проще воспользоваться другим известным соотношением: $\varphi^2 = \varphi + 1$. Отсюда следует

$$R = 2\varphi - \frac{2}{\varphi} = \frac{2\varphi^2 - 2}{\varphi} = 2.$$

Читатель может поэкспериментировать с другими пропорциями скатертей или значениями R. Удивительно, как много из них приводят к диофантовым уравнениям[1]. Что же касается скатертей миссис М., то все они покрылись грязью.

113. Получится черный квадрат, на котором расположена белая спираль, составленная из квадратиков и закручивающаяся внутрь *по часовой стрелке* (рис. 243).

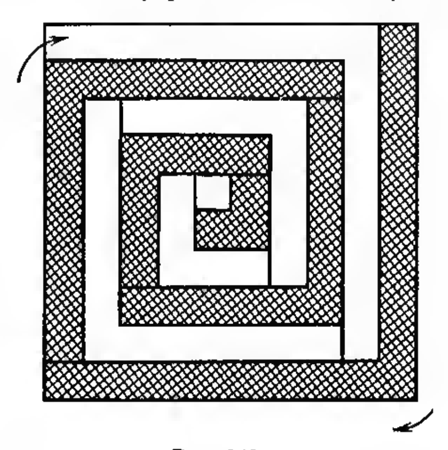


Рис. 243.

114. Надо взять прямолинейную шкалу и прикрепить ее к той части коромысла, где находится гиря w (на расстоянии C от F), причем перпендикулярно этой части (рис. 244, a). Расстояние между соседними точками деления шкалы должно быть постоянным. Вертикальная прямая FV будет играть роль стрелки, причем вес

[1] Так называются уравнения, решаемые в целых числах (впрочем, автор употребляет этот термин не совсем в том смысле, в каком он употребляется математиками). — *Прим. ред.*

груза L будет равен расстоянию a от точки пересечения шкалы с прямой FV (в положении равновесия) до начала шкалы. На рис. 244, *б* изображено положение равновесия, причем L и W, как и раньше, обозначают силы, направленные вертикально вниз (W постоянна); b — расстояние от L до F и c — расстояние от W до

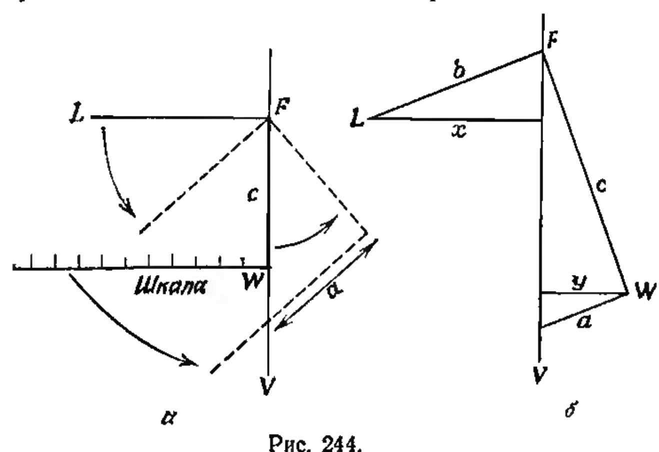


Рис. 244.

F. Как и выше, мы приходим к соотношению $xL = yW$. Поскольку прямая FV вертикальна, а отрезки a и b параллельны, все изображенные треугольники подобны;

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{y}{x} \quad \text{и} \quad ax = by.$$

Из условия равновесия находим $x = (yW)/L$. Подставляя это выражение для x в полученную выше пропорцию, получаем

$$\frac{ayW}{L} = by; \quad \therefore a = \frac{Lb}{W}.$$

Поскольку b и W не меняются, а L может менять свою величину, расстояние a должно меняться пропорционально L. Так, например, если мы удвоим L, то и a удвоится, ибо

$$\frac{2Lb}{W} = 2a.$$

Отметим, что c не должно равняться b.

Существует много и других решений данной задачи.

115. Сосуд представляет собой низенький цилиндр; его размеры приблизительно 5×8. (Старомодные банки из-под кофе очень близки к этому сосуду по форме и размерам.)

Большинство (если не все) из тонких кухонных сосудов — круглые. В условии сказано, что вода стала подниматься с *ровно* вдвое меньшей скоростью, чем раньше, а это, несомненно, означает, что и ранее скорость подъема воды была постоянной. Следовательно, стенки сосуда были вертикальны. Поскольку первая

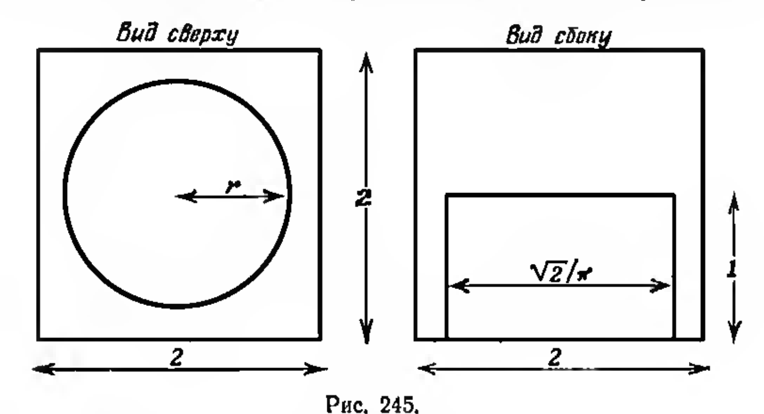


Рис. 245.

скорость была вдвое больше второй, площадь поперечного сечения сосуда составляет половину площади аналогичного сечения кубической кастрюли и, разумеется, высота сосуда в два раза меньше высоты кастрюли, Примем ширину кастрюли за 2 единицы; тогда радиус r сосуда найдется из формулы $\pi r^2 = 2$ (половина площади основания кастрюли). Следовательно, $r = \sqrt{2/\pi}$, то есть $\approx 0{,}8$, как и показано на рис. 245. (Истинная вместимость кастрюли не влияет на предыдущие рассуждения.)

116. Фигура представляет собой тело, а не полоску; лучше всего ее можно описать как тор с тройным поперечным разрезом и одним перекручиванием на полный оборот. Следовательно, у нее три стороны и три края. На первый взгляд фигура выглядит, как лист Мёбиуса с тремя перекручиваниями на пол-оборота,

у которого, как и у обычного листа Мёбнуса, одна сторона и один край; но, приглядевшись повнимательней, мы замечаем нечто странное.

Во всяком случае очевидно, что край AA' (рис. 246, *а*) не составляет часть края CC'; однако даже при самом развитом воображении мы не можем рассматривать край BB' как продолжение AA'. В самом

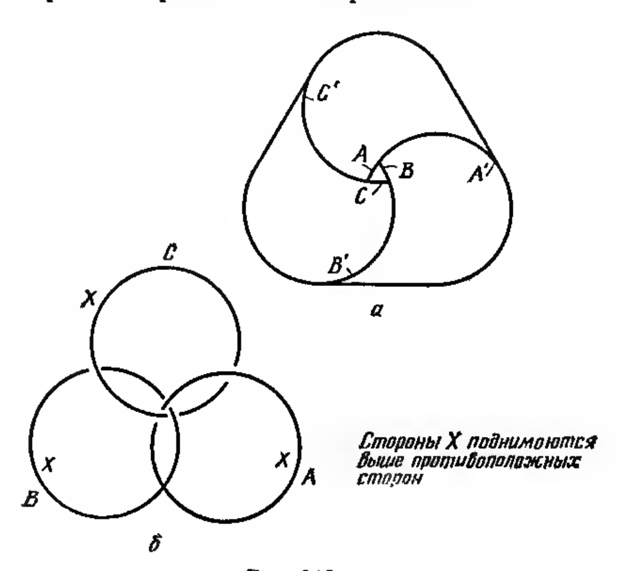


Рис. 246.

деле мы можем считать, что здесь есть три не связанных между собой края. Светлые и темные полоски могут нас только запутать, ибо они наводят на мысль о несуществующей параллельности, как, например, между краями BB' и CC' (рис. 246, *а*). На рис. 246, *б* показаны три края, каждый из которых представляет собой окружность; а на рис. 247 изображена одна из трех поверхностей, разрезанная и развернутая на плоскость. Она представляет собой двустороннюю поверхность с краями A и C. S находится внутри и скрыто телом. Именно рис. 247 показывает нам, насколько края далеки от параллельности и насколько произвольно нарисованы светлые и темные полоски, вводящие нас в заблуждение.

Модель можно сделать, вырезав три поверхности из картона и собрав их вместе и нужным образом склеивая края. Она выглядит неплохо, но сделать ее достаточно трудно [1].

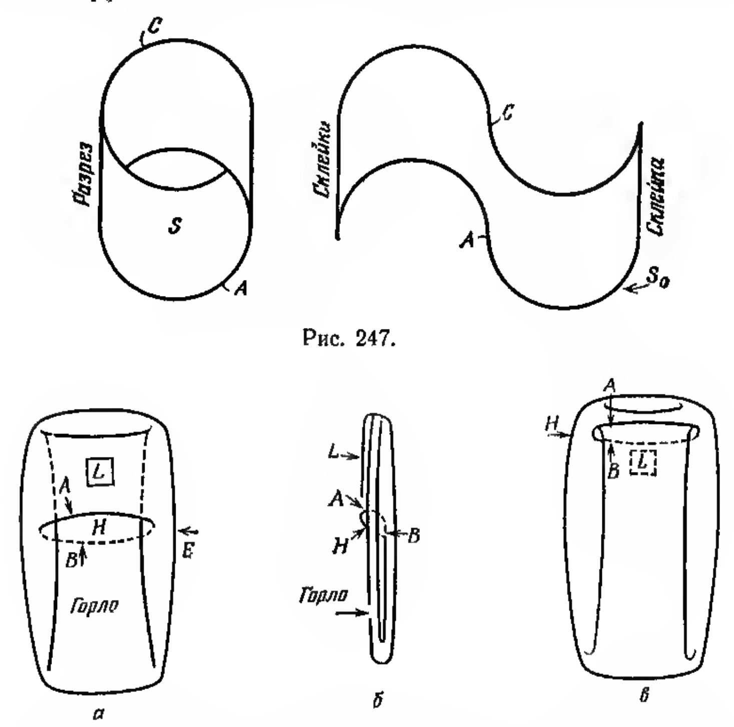


Рис. 247.

Рис. 248.

а — шаг 1. Бутылка Клейна сделана из связанного из шерсти цилиндра, который уплощается. *A* и *B* — части края дыры *H*; *L* — ярлык. *H* сдвигается вверх, горло — вниз.

б — шаг 2. Вид с края *E*. *H* сдвигается вверх, а горло вниз.

в — шаг 3. Вид спереди: ярлык *L* только что исчез внутри (через верх), *H* почти внутри.

117. Бутылку Клейна можно вывернуть наизнанку, причем ее вид не будет отличаться от исходного. Все зависит от формы и материала.

---

[1] Примечание для тех, кто будет изготовлять модель: поскольку поверхности перекручены и не могут быть практически развернуты в настоящие плоские фигуры, картон следует выбрать тонким, да к тому же надо смочить его водой, чтобы он растягивался.

Миссис Терри Бёркхардт прислала автору этих строк бутылку Клейна. В это невозможно поверить, но бутылку она связала из красной шерсти! Бутылка эта,

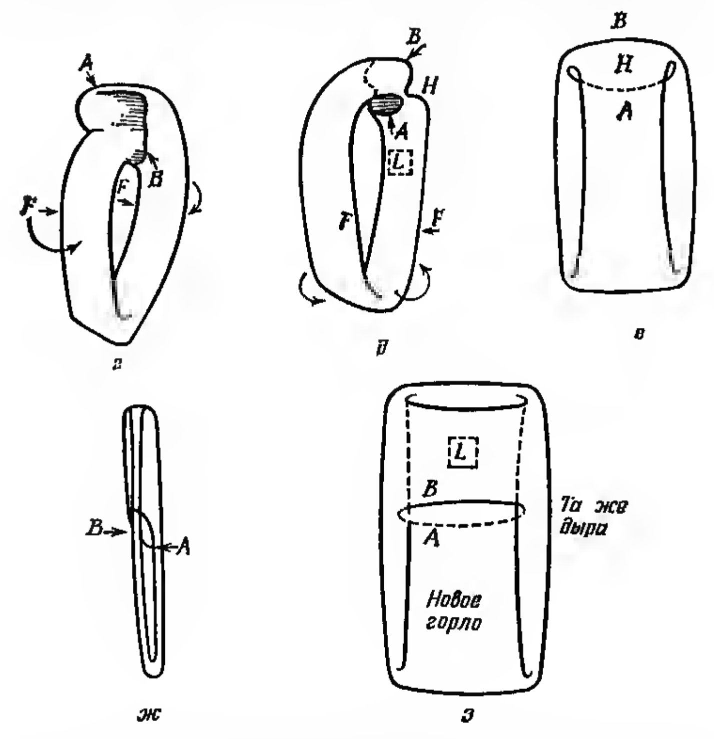


Рис. 248 (продолжение).

г — шаг 4 Повернуто более, чем в случае *б*, дабы доказать обратную сторону, когда *H* достигнет верхушки. Задние края *FF* теперь перекручиваются вперед.

д — шаг 5. Положение *A* и *B* меняются местами. Часть *H* смотрит в обратную сторону.

е — шаг 6. Теперь, все перевернув, мы видим заднюю сторону и начинаем поворачивать *B* вниз

ж — шаг 7 Продвигаем *B* через то, что теперь стало *передом* (вид сбоку).

з — в итоге по виду получилось то же, что и было в исходном случае *а*.

как здесь показано, топологически эквивалентна модели, приведенной в условии задачи (*говорят*, что последняя всегда кажется сделанной из стекла). Мы видим, что указанное здесь преобразование приводит в конце концов к результату, который выглядит так же, как и исходная модель, но ярлычок *L*, пришитый к, так ска-

зать, «внешией стороне» бутылкн, теперь оказался иа ее «виутреиней» (спрятаииой) части.

Даиное преобразование гораздо более удивительно, чем выворачиваиие иaнзнaику тора, ибо прн этом не меияется форма поверхиости.

II. Тор следует взять таким, чтобы после уплощения, или после того как мы разрежем его и разверием на плоскость, получился квадрат (рис. 249). В качестве материала можио взять резииу (или лучше связать тор

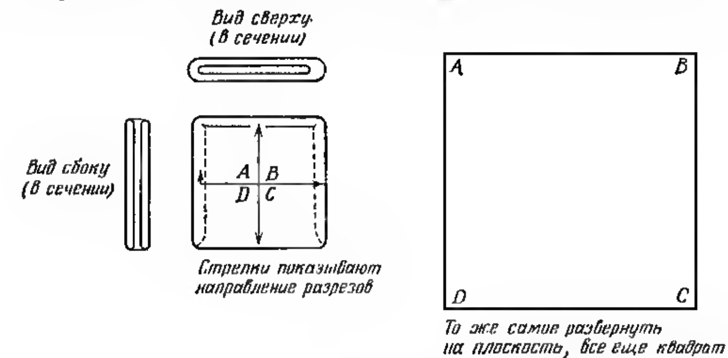


Рис. 249.

из шерстн). Его торическая форма после уплощения не является очевидиой, ио, как показаио иа рис. 250, при выворачнваинн иаизиаику длииа и шириа меияются местами, так что в случае их равеиства пропорции тора остаются прежиими. Дырку следует сделать вполовииу ширнны, как н в случае перевертыша миссис Терри, дабы тор легче было выворачнвать, одиако на рисуике дыра увеличеиа.

118. I. На рис. 251 показаиы все промежуточиые стадин процесса. Всего пришлось сделать 4 поворота.

II. Способ перестаиовки суидука изображеи на рнс. 252. (Это можио проделать с картоиым прямоугольииком иа доскe, разделеиной иа равные клетки.)

119. I. Начнем с треугольиого расположеиия, похожего иа второй способ; только теперь иижиий слой ограиичеи иеправильным шестнугольииком (рис. 253). Второй слой уляжется во впадииы S', одиако третий

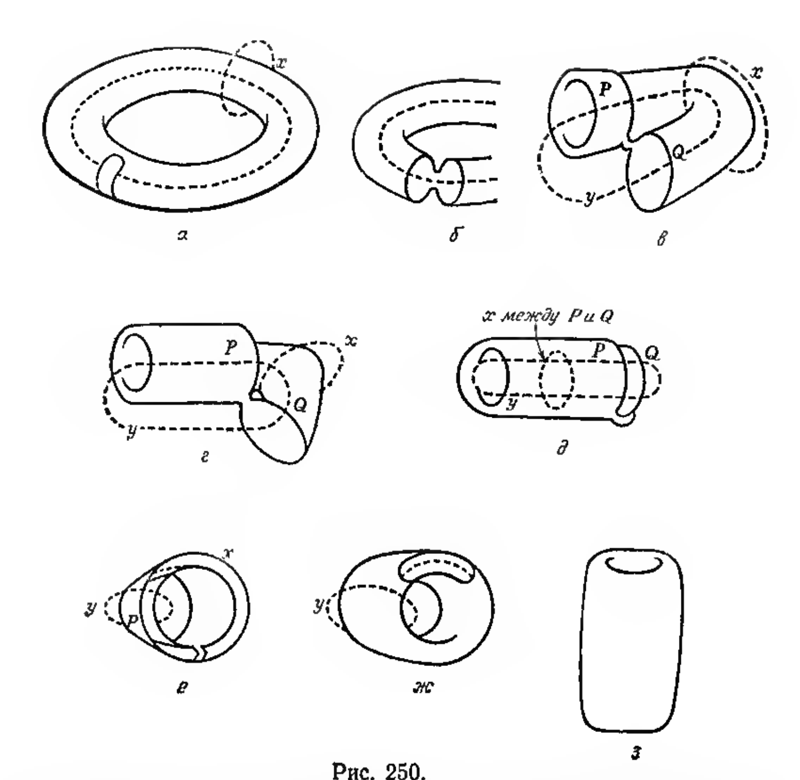


Рис. 250.

а — шаг 1 нормальные пропорции, *б* — шаг 2: растягивать дыру до тех пор, пока не останется узкий перешеек, затем начинаем выворачивать тор; *в* — шаг 3: завертываем часть тора назад, как голенище у носка, обозначив заново появляющуюся часть внутренней поверхности через *P*, а внешнюю — через *Q*; *г* — шаг 4: продолжаем действовать, как показано; *д* — шаг 5: действуем так до тех пор пока *P* не оказывается рядом с *Q*; *е* — шаг 6· уменьшаем дыру; *ж* — шаг 7: придаем дыре ее первоначальные размеры; *з* — шаг 8: поворачиваем в исходное положение.

Рис. 251.

слой будет расположен *прямо над первым*, что радикально отличается от второго способа, при котором все три множества впадин заняты на разных уровнях, так

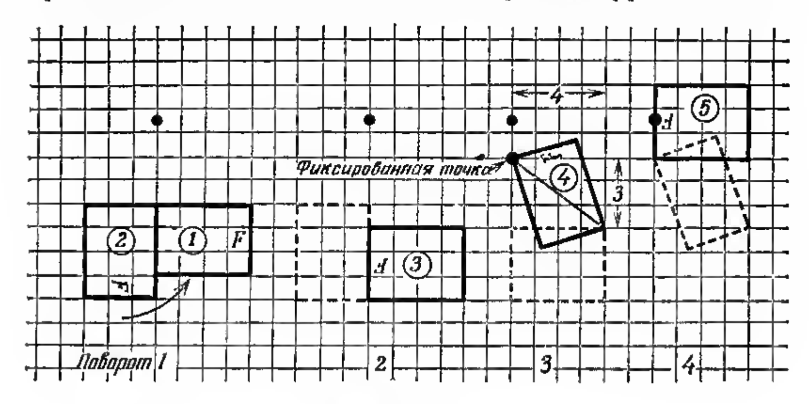


Рис. 252.

что на самом деле мы имеем три, а не два способа укладки. При нашем новом способе впадины N никогда

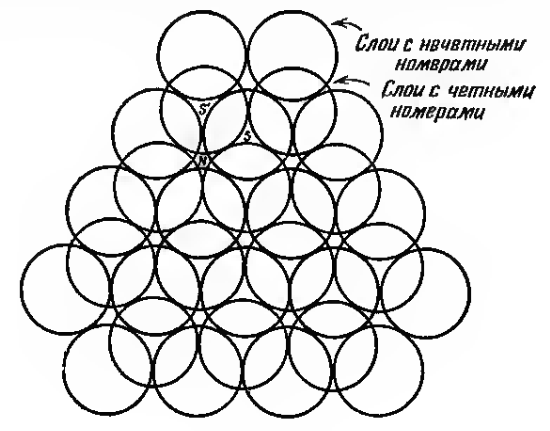


Рис. 253.

не будут заполнены, ибо расположения чередуются: S, S', S, S' и т. д. Следовательно, мы получим сквозную вертикальную дыру. При этом новом, или третьем, способе мы могли бы второй слой укладывать на впади-

ны N и в результате получили бы чередующуюся последовательность впадин S, N, S, N и сквозную дыру S'; однако у нас не оказалось бы (рис. 253) сквозной дыры в центре.

Причина, по которой мы выбрали для первого слоя шестиугольник вместо треугольника, заключается в том, что углы треугольника оказываются лишними; в любом треугольнике независимо от того, насколько он велик, угловая впадина всегда принадлежит к тому же типу, что и центральная, где мы должны водрузить флаг.

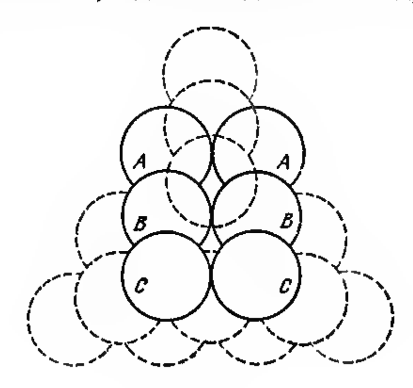


Рис. 254.

Другими словами, если мы опустим ядро в угловую впадину, то обнаружим, что и центральная впадина тоже занята; если же мы не будем опускать ядро в угловую впадину, то тогда угловое ядро первого слоя вообще окажется излишним, ибо оно ничего не будет поддерживать. (Чем большим мы возьмем нижний шестиугольный слой, тем ближе к правильному можно сделать соответствующий шестиугольник.)

Соотношение между этими тремя способами таково: первый и второй способы идентичны, за исключением того, что они, так сказать, «наклонены» относительно друг друга на 60°. Когда мы уложим достаточно большое количество ядер вторым (треугольным) способом, то заметим то же самое квадратное расположение, что и в первом случае, но теперь уже в слоях, наклоненных под некоторым углом к треугольнику, лежащему в основании (рис. 254). Шесть ядер, образующих квадрат-

ное расположение, показаны на рис. 254 сплошными линиями, а остальные ядра — пунктиром. Пары *AA*, *BB* и *CC* расположены соответственно в нижнем, втором и третьем слоях, так что мы как бы смотрим на пирамиду сверху. Любое множество шаров, идущих под тем же углом, образует квадратное расположение.

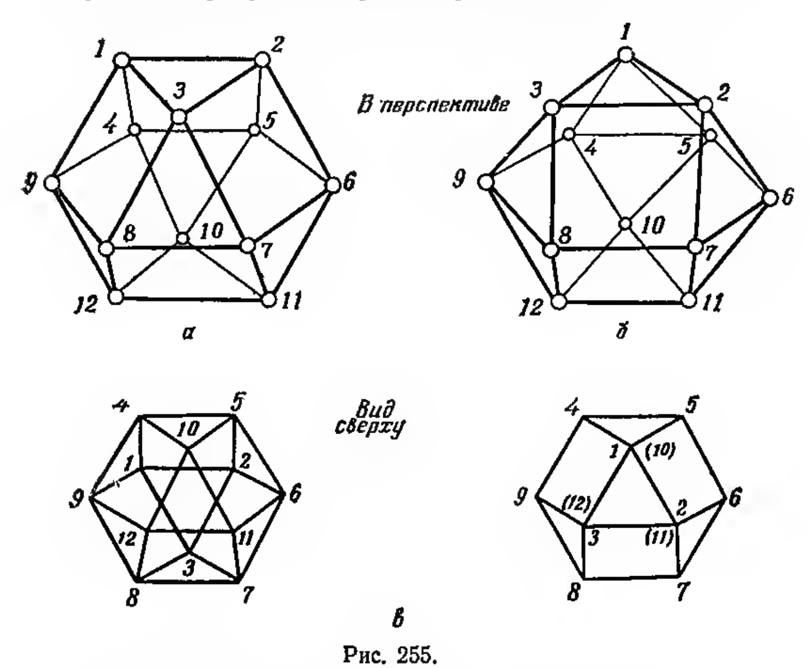


Рис. 255.

Мы сможем проанализировать все три способа наилучшим образом, если обратим внимание на то, что при каждом из них любое (внутреннее) ядро соприкасается с двенадцатью другими ядрами и что мы можем продолжить эти расположения во всех направлениях неограниченно. Центры 12 таких шаров (с 13-м в середине) образуют 14-гранник (рис. 255, *а*) при первом и втором способах. При третьем способе получается аналогичный многогранник, но его верхняя половина оказывается перекрученной на 60° (рис. 255, *б*), в результате чего соответствующие стороны верхнего и нижнего треугольников становятся параллельными. На

рис. 255, *в* показано, как эти многогранники возникают в наших трех случаях.

На рис. 256—258 все три расположения показаны в проекции на плоскость. В случаях рис. 257 и 258, по

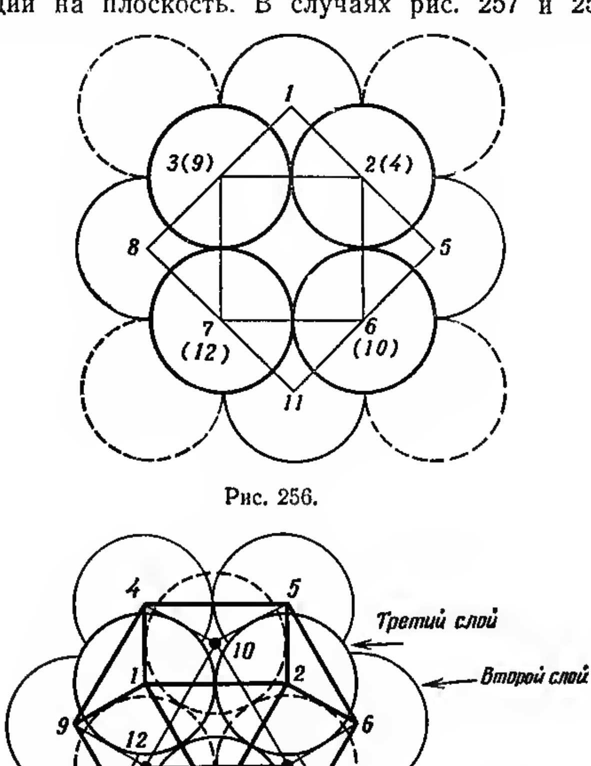


Рис. 256.

Рис. 257.

существу, повторяется рис. 255, *в*. Например, в последнем случае нижний треугольник (*10*, *11*, *12*) совпадает (в проекции) с верхним треугольником (*1*, *2*, *3*). В случае рис. 256 проекция соответствующего многогранника дается под углом в 55°, и его трудно по ней

узнать. Многогранник остается таким же, как и на рис. 255, *а*, только он поставлен на другую грань и наклонен так, что, например, квадрат (*3*, *2*, *6*, *7*) проектируется без искажений и совпадает (в проекции) с квадратом (*9*, *4*, *10*, *12*). Все числа на рис. 256 соответствуют числам на рис. 255, *а* и *б*.

Центральные ядра многогранников удалены. Чтобы лучше разобраться во всех этих соотношениях, стоит сделать картонные модели многогранников. Перенумеруйте вершины, но *верхние* треугольники оставьте пустыми, дабы сквозь них можно было заглянуть внутрь и увидеть, какие вершины кажутся совпадающими под данным углом зрения. На рис. 257 дальние ребра (не видимые глазу) мы обозначили тонкими линиями, а видимые ребра — жирными. Числа в скобках на рис. 256

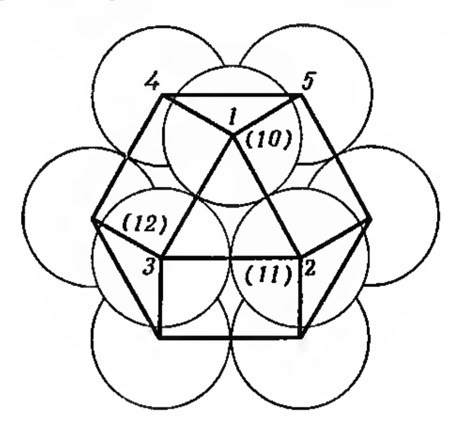


Рис. 258.

и 258 соответствуют невидимым вершинам, то есть тем вершинам, которые «прячутся» за видимыми вершинами, соответствующими числам без скобок. Круги, обозначенные здесь пунктиром, соответствуют части ядер из *второго* слоя, содержащего ядра *1*, *5*, *11*, *8*; ядра *9*, *4*, *10*, *12* находятся в нижнем слое

II. На второй вопрос головоломки следует дать отрицательный ответ, ибо при первом способе мы начинаем с неограниченно большого квадратного расположения ядер. Такой заполненной квадратами плоскости в третьем случае нет ни под каким углом: здесь квадра-

ты располагаются сплошными рядами, но сами ряды расположены не подряд. Следовательно, мы должны расположить ядра на кривой поверхности, дабы компенсировать эту неправильность в расположении рядов.

На рис. 259 показана соответствующая плоскость в третьем случае. Ее определяют ядра *1* и *5* в первом слое и ядра *2* и *6* во втором слое, которые вместе с ядрами *1* и *5* образуют квадрат. Угол α, под которым эта плоскость наклонена к основанию, равен углу на-

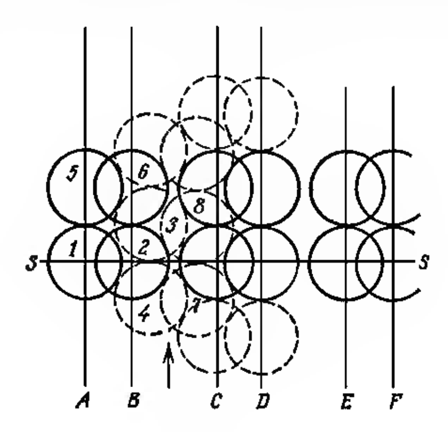


Рис. 259.

клона ребра (*1*, *2*) тетраэдра, образованного ядрами *1*, *2*, *3*, *4* ($\alpha = 55°$). Рассмотрим только ядра, лежащие на прямой *SS* справа от 1. Они и ядра, расположенные над ними, которые образуют квадраты, изображены сплошными линиями; несколько других ядер изображено пунктиром. Изобразим (рис. 260) в более крупном масштабе, причем сбоку, с направления, указанного на рис. 259 стрелкой, ядра, расположенные в вертикальной плоскости, проходящей через прямую *SS*. Четыре ядра, изображенные на рис. 260 слева, выше прямой *SS*, оказались бы здесь, если бы мы расширили нашу пирамиду. Все эти ядра могут лежать только на вертикальных прямых, обозначенных через *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* и т. д. Два ядра, изображенные пунктиром в положениях *x*, появляются в других вертикальных плоскостях и не могут образовать квадраты ни с какими

ядрами из данной плоскости, проходящей через *SS*. Справа на рис. 260 вы видите номера слоев.

Мы можем теперь заметить, что ряды квадратов, представленные на рис. 260 только парами ядер (как

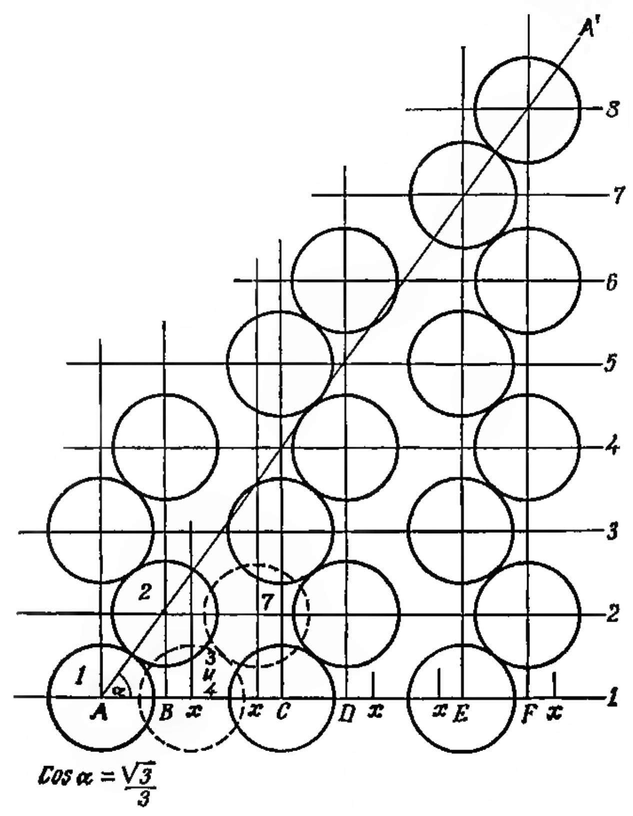


Рис. 260.

например, *1*, *2*), захватывают сначала на наклонной плоскости *AA'* первые два слоя; затем идет перерыв в четыре слоя, а далее вновь два слоя, *7* и *8*, участвуют в образовании очередного ряда и т. д. Следовательно, если мы пожелаем сложить пирамиду, взяв за горизонтальное основание плоскость *AA'*, то основание окажется ступенчатым и флаг печально наклонится под углом α.

120. Обе оценки совпадали.

Рассмотрим одну из четырех полуцилиндрических накладок a и четверть первоначальной колонны ABC и докажем их равенство (рис. 261)

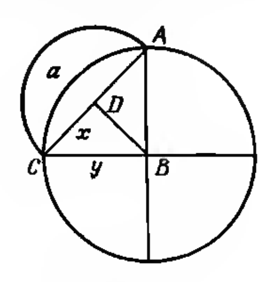


Рис. 261.

D — середина стороны AC; мы примем $x = 1$. Тогда $y = \sqrt{2}$.

Площадь

$$a = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi(\sqrt{2})^2}{4} - \frac{(\sqrt{2})^2}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi \times 2}{4} + \frac{2}{2} = 1.$$

Площадь

$$ABC = \frac{(\sqrt{2})^2}{2} = 1.$$

Внимательный (неглухой) мастер был учеником Гиппократа (не знаменитого врача, а математика пифагорейской школы [1]), который и открыл приведенное выше соотношение.

121. Вспышка молнии могла произойти в любой точке гиперболы с фокусом в F.

Обычно *гиперболой называется геометрическое место точек, разность расстояний от которых до двух фиксированных точек (фокусов гиперболы) постоянна.* Но человек из P знает, что, где бы ни находился источник звука S, он на 3 км ближе к F, чем к P.

---

[1] Гиппократ Хиосский (I в. до н э.) находился, видимо, под влиянием пифагорейцев, но сам не принадлежал к этой школе. — *Прим. ред.*

На рис. 262 показано ближайшее к P (из возможных) расположение источника S'.

$$a = b - 2, \quad \text{значит,} \quad b = a + 2;$$

$$\therefore a + a + 2 = 4, \quad \text{так что} \quad a = 1 \quad \text{и} \quad b = 3.$$

После слов приятеля человеку из P стало ясно, что вспышка молнии произошла к востоку от F.

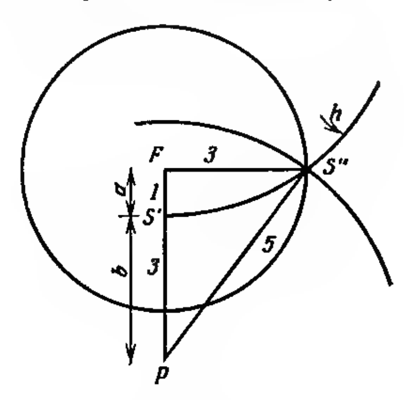


Рис. 262.

Мы можем пренебречь гиперболой h и сосредоточиться на времени, прошедшем от вспышки до того момента, как человек из P услышал гром непосредственно (а не по телефону). Приятель сообщил, что услышал в F гром через 15 с после того, как вспыхнула молния (в тот же момент человек из P услышал его по телефону); следовательно, вспышка молнии произошла за 25 с до того, как человек услышал его в P непосредственно. Значит, S расположен от P в 7,5 км. На рис. 262 радиус дуги с центром P равен 7,5 км; а окружность с центром в F радиуса 4,5 пересекается с этой дугой в точке S''. У треугольника $S''PF$ стороны соответственно равны 7,5; 6 и 4,5. Значит, они относятся как $5:4:3$, то есть треугольник $S''PF$ — прямоугольный. Таким образом, S'' находится точно к востоку от F.

122. Общее (до сих пор известное) число таких четырехугольников равно 18. Обратите внимание, что на

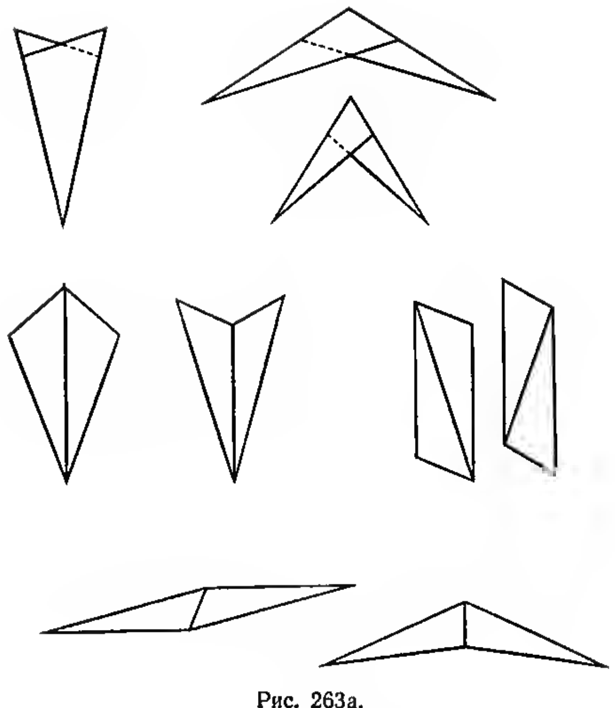


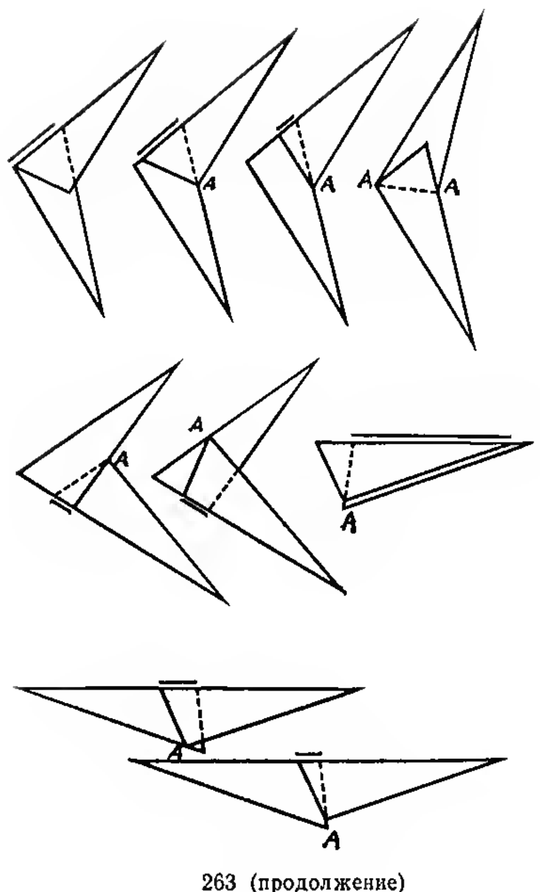
Рис. 263а.

рис. 263 обозиачает положеиие одной вершины на другой вершине или иа стороие. Лииия, нарисованная сбоку фигуры, показывает длииу общего участка сторон.

ОТВЕТЫ К ГОЛОВОЛОМКАМ, ВЗЯТЫМ В ОСНОВНОМ ИЗ ПОВСЕДНЕВНОЙ ЖИЗНИ

1. Мокрая стеклянная подставка. Чнстая тряпка должиа быть сухой. Еслн виизу у подставкн нмеются царапииы и трещины, то в мокром состояннн оиа более прозрачиа.

2. Скорее всего это была королева Елизавета. Замерзшие каплн могут образовать на ветвях деревьев крошечиые сосульки длиной около 2 см. Сосульки большей длины редко встречаются в природе, разве что



263 (продолжение)

у водопадов. Королева, коиечио, видела больше домов, чем ее американская современиица водопадов (женщины племеии Алгоиквин охотились редко). Кроме того, сосульки одного водопада обычио не меияются в течение всей зимы, в то время как на крышах отаплнваемых домов, особеиио в Аиглии, оии часто тают, а на их месте вырастают иовые сосулькн. У вигвамов же карнизы отсутствуют.

3. Его правый локоть упирается в левое колеио.

4. Всего изображено 57 предметов. Трюк состоит в том, чтобы считать предметы в порядке возрастания их сложности: мы начинаем с точек, затем переходим к линиям, затем — к кругам, потом — к квадратам и наконец — к буквам. Когда вы найдете, что число точек равно 16, продолжайте счет, переходя к линиям: 17, 18 и т. д.

5. Расположение предметов будет соответствовать их размерам, а не весу. Если двигаться снизу вверх, то расположение окажется следующим: крошки хлеба, ячмень, дробинки, шарики.

6. Восточная часть Северной Америки и западная часть Европы перекрываются (по долготе). Согласно данным Национального географического общества, Исландия относится к Европе. Ее западное побережье расположено на 200 миль западней меридиана, соответствующего 17° западной долготы, который проходит через остров Шеннона; последний же в свою очередь является восточной окраиной Гренландии (часть Северной Америки).

7. Нужно двигаться на северо-восток по Пятой авеню. При этом ваш путь пройдет через Северную Европу. Если бы вы отправились на юго-восток по 42-й улице, то как раз проскочили бы мимо южной Африки и попали бы на сушу только в Азии. Дабы убедиться в этом, вам следует взять большой глобус, снабженный кольцом, идущим вдоль большого круга (или подождать до очередного Ледникового периода).

8. Шанхай.

9. На поверхности воды не будет почти ничего. (Это бывает не всегда, но часто — пока вы не встряхнете чайник или не начнете его нагревать.)

10. Таких чисел имеется 90.

11. Из рис. 264 видно, что дождь, падающий из фронта туч протяженностью 100 км под углом 45°, смачивает участок земли той же длины, что и вертикально падающий дождь; только этот участок сдвинут

влево. Дело в том, что надо сравнивать площадь смоченного грунта с площадью параллельного ему участка тучи. В случае же наклонной крыши (рис. 104, *а*) это

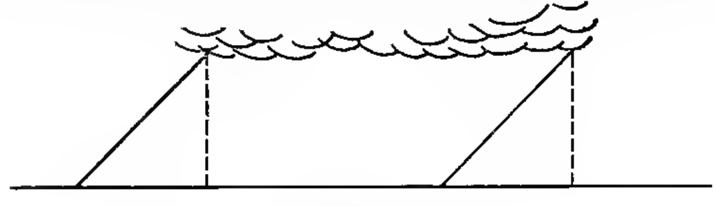


Рис. 264.

рассуждение не проходит. Если, например, 100 км туч смачивают 100 км грунта, то 10 см туч смачивают 14 см крыши.

12. Внутри первой коробки находится сырой рис, насыпанный под углом (рис. 265, *а*). Во второй коробке

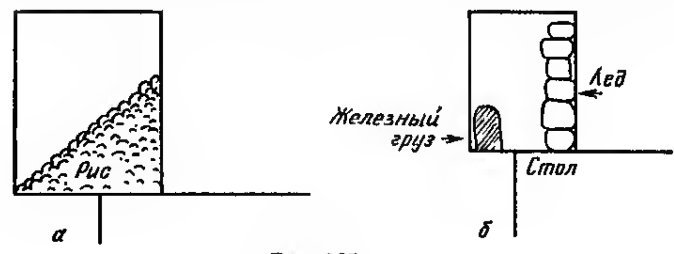


Рис. 265.

находится железный грузик (рис. 265, *б*), уравновешенный стопкой кусочков льда (дело происходит зимой в неотапливаемой комнате). Если мы закроем окна и включим отопление, то лед растает и коробка опрокинется.

13. Центр шарика опишет гиперболу. Если читатель вспомнит определение этой кривой, приведенное в ответе к головоломке 121, то поймет, что центр *С* шарика движется так, что расстояние от него до края *Е* всегда равно радиусу шарика и, в любом положении расстояние от него до центра полуцилиндра всегда равно радиусу шарика плюс радиус цилиндрической крышки. А это как раз и соответствует определению гиперболы.

14. Манускрипт содержал ие *более* 15 перенумерованных страниц. Ключом к решению является то обстоятельство, что четный номер предшествует нечетному. Страницы манускрипта обычно нумеруются так, что нечетный номер ставится на лицевой стороне каждого листа, причем начинается нумерация с 1 на первой странице. Следовательио, на какой-то странице (стороне) или на нечетном числе страниц текст был соскоблен и нумерация была перенесена на следующую страницу. Поскольку мы сказали, что «средний лист» имел нумерацию 6/7, максимальное число стертых страниц могло быть равно 3, а соответствующее число следующих (после средиего) листов содержало лишь иестертые страницы. Вот как будет выглядеть такое расположение:

$$\frac{1}{2}\ \frac{2}{3}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{5}\ \frac{6}{7}\ \frac{8}{9}\ \frac{10}{11}\ \frac{12}{13}\ \frac{14}{15}.$$

Если бы обе стороиы какого-либо листа оказались стертыми, то соответствующий лист был бы вырваи из манускрипта.

15. Это можно сделать. Возьмите сковороду за ручку и начните быстро двигать ее взад-вперед на небольшое расстояние по полу. Вода ие будет раскачиваться тоже взад-вперед, а вскоре образует пик и стаиет выбрасывать вверх капельки, которые и можно будет собрать в чашку.

16. Полка окажется слишком короткой. Когда вы положите 20 томов друг иа друга, то получившаяся стопка спрессуется под собственной тяжестью и ее высота будет меньше, чем длина той же стопки, положенной горизонтальио. Поэтому, для того чтобы уместить всю энциклопедию на сделанной вами полке, пришлось бы затратить огромные усилия.

17. Если человек иосит очки, то ои сиимает с себя свитер, держа его за воротник, и, следовательно, растягивает его перед собой. Когда человек иатягивает свитер на себя, то получается прямо противоположный эффект, ибо очки как бы делают воротник еще уже.

18. Точнее всего на Марокко направлен конец *A*. Мы смотрим на восточную сторону скалы, так что справа от нас находится Испания, а слева — Средиземное море.

19. Наименьшую силу нужно приложить в точке *P* (рис. 266), ибо у большинства, если не у всех овальных блюд ширина обода постоянна. Мы видим, что отношение расстояния от края обода до точки основания

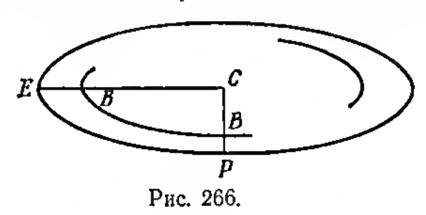


Рис. 266.

B (которая играет роль точки опоры) к расстоянию от *B* до центра *C* будет больше в точке *P*, чем в точке *E*.

20. Три колоса в лучшем случае, если, конечно, вы не намылите пакет внутри.

21. Сила тяжести. Из-за нее вещи неудобно располагать вертикальными стопками; поэтому-то полки на кухне и делают такими длинными. Таким образом, различие в ширине предметов значит меньше, чем наличие даже одной-единственной коробки или бутылки, которая много выше остальных. Холодильники же заполняют как в горизонтальных направлениях, так и по вертикали.

22. Высота будет больше расстояния от Земли до Солнца. (Не пытайтесь проделать это.)

23. Он может подобраться на расстояние около 4500 миль. Диких пингвинов нет севернее Галапагос-

ских островов, которые расположены на экваторе, а полярный медведь (они водятся лишь в северном полушарии) редко уплывает от берега дальше чем на 40 миль.

24. Можно, если очень быстро разболтать воду в чашке.

25. Подойдите к дереву и на высоте 2 м от грунта прикрепите к стволу клочок белой бумаги. Вернитесь домой и положите на стол вблизи окна, из которого видна сосна, стопку книг. На стопку поставьте согнутый кусок картона, поверх которого мы можем видеть основание и вершину сосны, а также клочок белой бумаги на стволе. Отметьте сами (или попросите кого-нибудь отметить) точку пересечения трех соответствующих лучей зрения с оконным стеклом и измерьте расстояние между этими точками. Сосна почти наверняка растет вертикально и, следовательно, параллельно оконному стеклу. Вычислив простейшие пропорции, вы найдете высоту сосны.

26. Один король, а именно шотландский король Яков VI, который стал королем Англии Яковом I в 1603 г. Другие короли во время коронации были принцами, герцогами и т. д.

27. Площадь равна $\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right)$ квадратным футам. Продолжим рисунок так, чтобы получился прямоугольник (рис. 267). По теореме Пифагора $h=\sqrt{3}$. В силу симметрии площадь новой заштрихованной части A

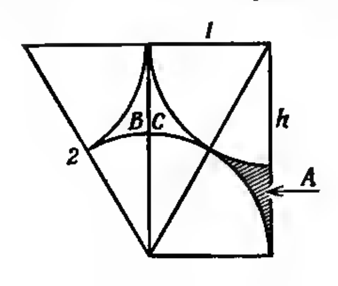


Рис. 267.

равна площади B. Площадь $A+C$ равиа площадн прямоугольиика мииус половииа площади круга с радиусом 1, то есть оиа равиа $\sqrt{3}-\pi/2$.

28. Солице и лампа. Оба эти предмета дают свет. Когда мы говорим «солице *вышло* из-за туч», и «лампа *вышла* нз строя», то это означает, что солнце иачинает светить ярче, а лампа гасиет.

29. Нисколько, нбо вы окажетесь более чем на 20 миль восточней исходиого пуикта.

30. У вас, вероятио, иайдется узкий продолговатый стекляиный илн пластмассовый стакаичик. Зажмите сигарету между пальцами, как показаио иа рис. 268, и

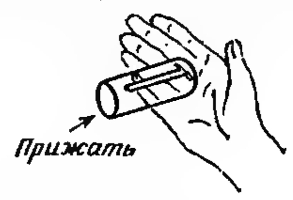


Рис. 268.

прнжмите стакаичик к ладоин. Двуокись углерода очень быстро потушит огоиь.

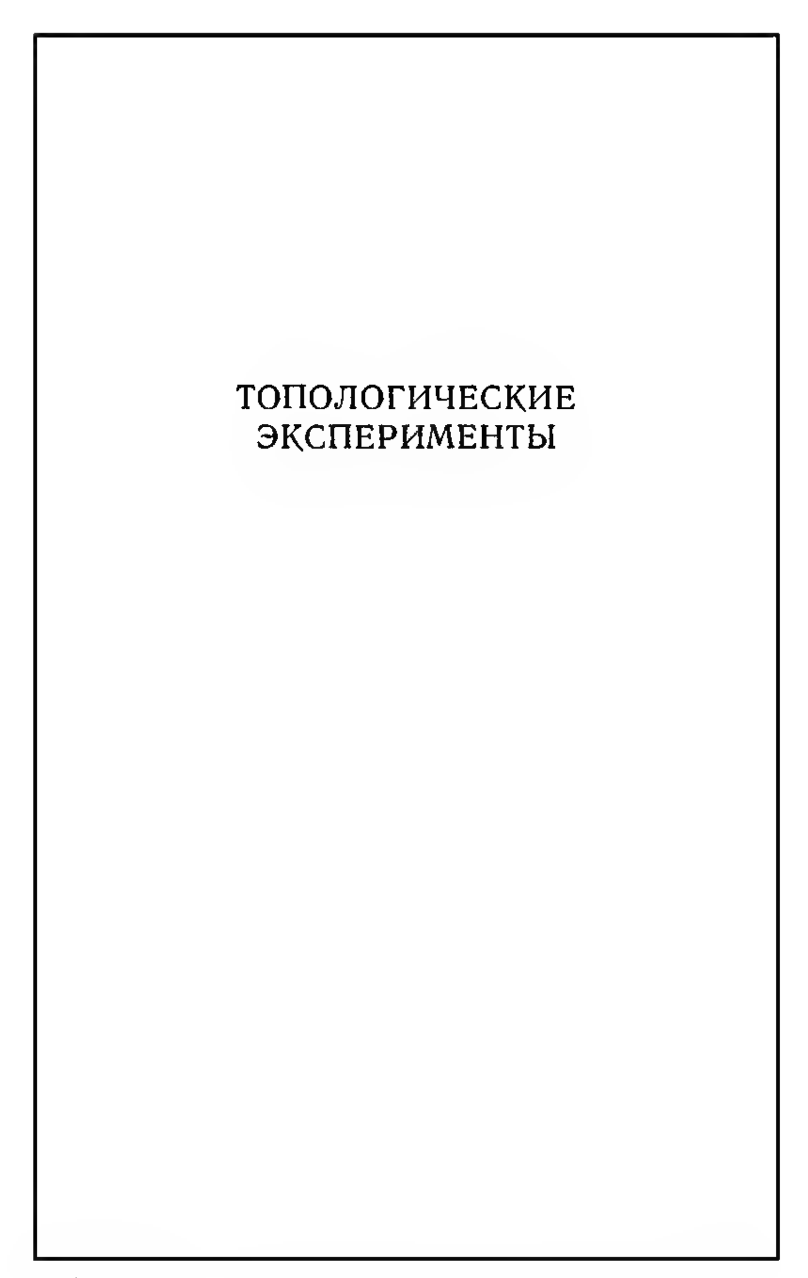
31. Мыс Марроки: несколько южиее Гибралтара. Мыс Игольиый, или Агульяс: более чем иа 45 км южнее мыса Доброй Надежды. Острова Диего-Рамирес: около 70 км к югу от мыса Гори. Оии иаходятся ие на материке, ио все равно образуют мыс.

32. У вагоиа фуиикулера, где, кроме обычиых колес, имеется еще н шестерия, которая зацепляется за полотно дорогн и не дает вагоиу скатнться вииз.

33. Ои кладет две ложки сахару. Обозиачим колнчество сахара, пристающего к виутреиией стороне ложки, через x; тогда мы должиы прииять, что и к ее виешней сторoие пристает тоже x сахару. В противиом случае задача оказалась бы неразрешимой, да к тому

же площади внутренней и внешней стороны примерно одинаковы. Следовательно, если принять объем ложки за 1, то из мокрой ложки в чашку попадает после разбалтывания $1+x$ сахару. Если мы положим две ложки, то из первой ложки (без разбалтывания) в чашку попадет $(1-x)$ сахару, а из второй, последней ложки $(1+x)$ сахару; так что всего в чашке окажется ровно 2 единицы сахару. В случае трех ложек это количество окажется раным $1-x+1-x+1+x=3-x$; в случае четырех ложек оно будет равно $4-2x$; наконец, в общем случае n ложек оно выразится формулой $n(1-x)+x$, что асимптотически равно $n(1-x)$. Профессор хотел положить ровно 2 ложки, и ему это удалось сделать.

34. Это ртуть и вода. Ртуть можно добыть, разбив термометр. Вода оказывается сверху ртути, и ее легко можно слить, а любые следы воды на ртути можно удалить промокательной бумагой или просто подождать, пока вода испарится. Всевозможные масла оставляют после себя на ртути и воде почти неудалимые следы.



ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Математиков стиль так для нас необычен,
А понятный язык вовсе им не привычен.
Рассуждения их коль решите понять,
Так придется вам новый язык изучать.
И на всех с артистическим складом ума
Нападет он, как оспа или чума.

Где же понять нам, что числа, подобно стрижам,—
А стрижи так стремительно в небе кружат! —
Расположатся в ряд на бескрайней прямой.
Да стрижи, возвращаясь с полета домой,
Не собьются с пути, а тополог,
Ей-ей, страны света смешает и небо с землей,
Рассуждая: мол, разницы нет никакой.

I

ЧТО ТАКОЕ ТОПОЛОГИЯ?

Топология — сравиительно новая область математики, а потому говорнть об *экспериментах* в столь абстрактной науке может показаться страниым (если только речь ндет ие о «переднем крае», где можио надеяться иа новый вклад), тем более что мы нсходим из поляого иеведеяия читателя в рассматриваемой намн областн. Но, может быть, нмеиио в силу «молодостн» ннтересующего иас раздела математикн иам удастся кое-что к нему добавнть, правда, это будут побеги на ветвях, а не на вершние нашего древа. Кроме того, иекоторые экспернмеиты если и ие добавляют ннчего иового к тому, что было известно раньше, то по крайией мере помогают читателю понять этот трудноуловимый предмет.

Топологии уднвительио трудио дать определеине. Ее описанне значительио сложиее тех формулировок, которые предлагают призиаииые справочиикн и энцнклопедия для *арифметики* («Наука о положительиых вещественных чнслах» — Webster's New Collegiate Dictionary нлн «Искусство маинпулнровання с чнсловымн велнчннамн и их отношеннямн» — Encyclopaedia Britannica), *алгебры* («Обобщенне н расшнреиие арнфметикн» — Encyclopaedia Britannica) или *геометрии* («Изученне [математнческнх] свойств простраиства» — Encyclopaedia Britannica). [Марк Барр вообще определяет математнку как иечто «предназиаченное держать факты в состояиии оцепеиения, в то время как мы бесстрастно изучаем соотношеиия между ними», что особенио прнмеинмо к алгебре.]

Стартовав как раздел геометрии, топологня быстро виедрилась и во миогне другие областн математнкн. Кажется почти правнльным утвержденне, что топологня представляет собой особое состоянне ума н преследует свои собствеиные целн. (Впоследствии мы увнднм, что эта смутная фраза звучит достаточио топологичио.)

В некотором смысле слова топология — это наука, изучающая *непрерывность*: исходя из непрерывности пространства или форм, она переходит к обобщениям, которые затем по аналогии приводят к новому пониманию непрерывности, а «обычное» пространство, как мы себе его представляем, остается далеко позади. Истинные топологи избегают всяких картинок, испытывая к ним некоторое недоверие. Это вызвано тем, что невозможно (и бессмысленно!) изобразить занимающие их «пространства». Однако нам будет легче подойти к пониманию их целей, к *топологической точке зрения* на определенные формы (или «пространства»), если мы начнем с того, что можно увидеть и потрогать.

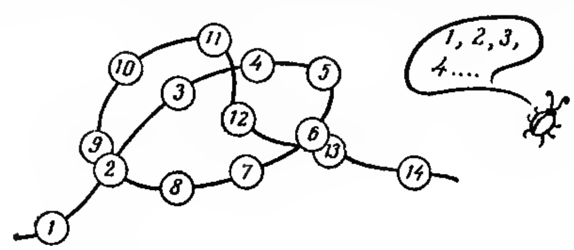


Рис. 1.

Тополог интересуется теми свойствами «предметов» (трактуемых нами пока в геометрическом смысле), которые наиболее устойчивы, то есть которые выдерживают деформации сжатия и растяжения.

«Округлость» круга, очевидно, не относится к числу таких свойств: можно скрепить концы отрезка проволоки и сделать из него круг, а затем, не разрывая проволоку и не разъединяя концов, превратить круг в квадрат. Но тот факт, что у этого (скрепленного!) куска проволоки *нет концов*, при этом сохранится, и если мы прикрепим к проволоке бирки с номерами, то сохранится и *порядок* номеров, даже если мы завяжем проволоку в узел, только номера мы всегда должны читать, двигаясь вдоль проволоки, подобно ползущему по ней жуку (рис. 1). Это окажется верным, даже если мы возьмем вместо проволоки резиновый жгут, который можно растягивать и сжимать: ведь здесь могут измениться лишь расстояния между бирками, а не их порядок.

С похожей ситуацией мы встречаемся при проектировании: прямая линия отбрасывает прямую тень, а треугольник, под каким углом его ни поверни,— треугольную; этот факт всегда верен, хотя углы треугольника, разумеется, могут измениться. Однако в топологии прямая не обязана оставаться прямой, хотя она сохранит свойства «линейной связности и разомкнутости концов». (Впрочем, возможны случаи, когда последнсе свойство не имеет места; так получится, например, если мы примем за прямую экватор большого глобуса или

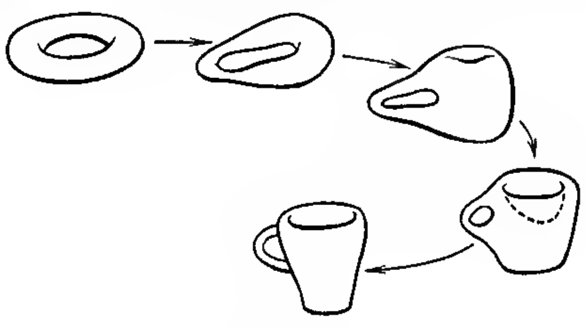


Рис. 2.

земного шара. Ползущий по экватору жук доложит нам, что движется по прямой, не имеющей концов.) Именно с такой связностью и с такой непрерывностью нмеет дело топология, и поэтому в ней разрешаются только такие деформации, которые не *разъединяют* то, что было соединено (нельзя, например, делать разрезы или прокалывать дыры), и не *соединяют* того, что не было соединено ранее (например, нельзя склеивать ранее разъединенные концы линии или заполнять имеющиеся дыры).

Согласно этому правилу, мы можем, скажем, из шарика глины сделать чашку; однако эта чашка не будет иметь ручки привычного вида, так как тогда пришлось бы проделать в глине дырку. Но если мы возьмем кусок глины в форме бублика, то, как показано на рис. 2, из него уже можно сделать чашку с ручкой.

Уточним: делать разрезы разрешается при условии, что в конце они будут вновь устранены. Например,

некоторые топологн считают, что проволочную петлю, изображеиную на рнс. 3 слева, можно преобразовать в нзображенную справа петлю, не нарушая ее связности. Верно, что обе петлн однилаково связиы, ио вполне очевндно, что нельзя сделать из первой проволочной петлн вторую, не разрезав проволоку н ие соеднннв вновь ее концы; последнее как раз и разрешается. Мне могут

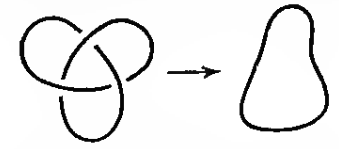


Рис. 3.

возразнть, что преобразованне первой петли во вторую возможно и без разрезания, но в четырехмерном пространстве. Однако на первоначальной стадии нзучення математикн наше правило более понятно: разрешаются любые разрезы при условнн, что в итоге мы нх ликвидируем.

Другой пример: кусок глнны в форме бублика нельзя превратить в плоское блюдо без дырки. (Кстатн, такая поверхность называется *тором*.) Характерпстнки тела, подобные иаличию илн отсутствию дыры, называются *топологическими инвариантами*. Иногда как будто

Рис. 4. Рис. 5.

бы новый инварнант может оказаться следствием другого нварнаита; однако на даином этапе мы не будем особенно обращать на это внимание.

Кусок глнны без дыр называется *односвязным*. Нетрудно заметнть, что еслн на таком куске (рнс. 4) иарнсовать круг (нлн другую замкнутую кривую), то вся поверхность разобьется на две частн: внутреннюю и внешнюю (то же самое будет и на лнсте бумагн). Аналогнчным образом экватор разбнвает на две части глобус, хотя здесь трудно сказать, какая часть «внут-

ренняя», а какая «внешняя», но тем не менее частей получается по-прежнему две.

Если мы проведем еще однн круг, то он лнбо вовсе не пересечет первого круга, либо пересечет его в двух местах. Употребляя здесь слово «пересечет», мы нмеем в виду настоящее пересечение, а не касание, как это имеет место, напрнмер, для кругов на рнс. 5. Это происходнт потому, что мы начннаем проводить второй круг из точки, расположенной *вне* первого, а затем, пересекшн первый круг, оказываемся *внутри* его н не можем закончить новый круг, не выйдя опять вовне первого, для чего нам и понадобнтся второе пересечение. То же рассуждение сохраняет силу н в случае, когда мы начинаем проводить второй круг из внутренней точки первого круга.

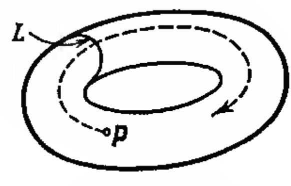


Рис. 6.

Разберем теперь случай тора (рнс. 6). Сначала проведем лнннюю L. Мы можем заметнть, что она *не* разбивает всю поверхиость на две части, н поэтому, если мы начнем проводить второй круг нз любой точки, скажем из точки P, то эта точка не будет ни внутренней, ни внешней по отношению к кругу L. Следовательно, еслн мы пересечем L, то сумеем замкнуть пунктирную крнвую, которую проводим, не пересекая вновь L. Как показано на рисунке, *существуют* две окружности, пересекающиеся *только в одной точке*. Этот факт, который несправедлив в случае односвязной поверхностн без дыр, верен для любой поверхности с дырой и является топологическим инвариантом.

Как было сказано ранее, тор можно деформировать в любую поверхность с одной дырой, а окружность — в любую замкнутую кривую без концов, не имеющую самопересечений. Подобная кривая носит названне *жордановой кривой* — по нмени математнка, который доказал, что такая кривая разбивает односвязную

поверхность (например, плоскость или сферу) иа две области, не имеющие общих точек, общая граница которых совпадает с данной линией. Это утверждеиие может показаться очевидным, но, как ни парадоксально, доказать его очень трудно[1]. Жорданову кривую, разбивающую поверхность на две части, *можно* нарисовать н на торе; нужно только, чтобы она не окружала дыру н не проходила через нее, как это имело место в случае двух кривых на рис. 6. Однако на плоскости или на сфере *всякая* жорданова кривая разбивает поверхность иа две части, а на торе это верно не для всякой жордаиовой кривой. Если можно деформировать одиу фигуру (или кривую) в другую фигуру (или кривую) с со-

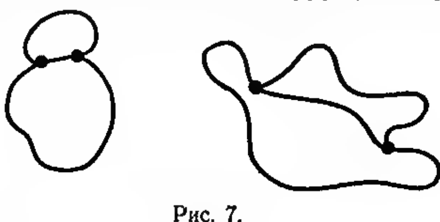


Рис. 7.

блюдением всех сформулированных выше условий, то говорят, что эти фигуры (или кривые) *гомеоморфны* друг другу.

Начерчеиный на куске глиины треугольник мы можем *гомеоморфно* деформировать таким образом, чтобы у иего исчезли углы и он превратился в итоге, скажем, в окружность. Однако если мы отметим положение его вершин, то соответствующие точки останутся *на линии* и после деформации, причем будут находиться *в том же порядке*, что и раньше (если двигаться по часовой стрелке). Аналогичным образом, если мы иачертим фигуру, изображенную на рис. 7, которая представляет собой объединенне двух кривых, соединенных между собой в двух различных точках, то любая деформация, подчиняющаяся нашим правилам, не сможет изменить такое устройство этой фигуры. При любой такой деформации не только сохранятся две точки соединения, но и не появится новых точек такого типа, ибо это при-

[1] См. Вольперт Э. И. Элементариое доказательство теоремы Жордана, Успехи мат. наук, вып. 5, — М.: 1950, с. 168—172, или Филиппов А. Ф., там же, с. 173—176. — *Прим. ред.*

вело бы к линии *другой связности*. Так, если экватор на сфере (рис. 8, *а*) соединить линией в точках p и p', то, как бы мы ни преобразовывали *топологически* получившуюся при этом фигуру, ее структура не изменится (рис. 8, *б* и *в*).

Фигура на рис. 8, *б* получается из рис. 8, *а*, если стянуть экватор на одну полусферу, сократив (и прогнув) линии. (Рисунок на поверхности можно деформировать,

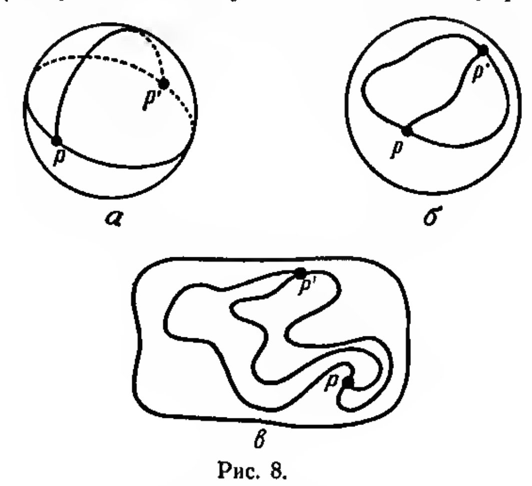


Рис. 8.

следуя нашим правилам.) Мы видим, что фигура по-прежнему разбивает поверхность на три части: она по-прежнему состоит из трех отрезков линии, которые, как и раньше, соединены в двух различных точках. Эти основные особенности сохранятся при любой допустимой деформации. Именно с такого рода свойствами и имеют дело топологи.

Теорема Эйлера

Первый пример топологических инвариантов дает теорема швейцарского математика Леонарда Эйлера, установленная в 1752 г. В ней речь идет о многогранниках, то есть о пространственных телах, подобных кубу или тетраэдру (рис. 9), которые ограничены кусками плоскостей (*гранями*), скрепленными попарно вдоль прямолинейных *ребер*, соединяющихся между собой в угловых точках — *вершинах*. Вы можете рассмотреть и

более сложные многогранннкн с любым числом граней, которое, однако, нельзя сделать меньшим четырех (случай тетраэдра). Эйлер доказал, что еслн сложнть число вершни с чнслом граней н вычесть чнсло ребер, то *всегда* получнтся чнсло 2, незавнснмо от того, насколько сложным был нсходный многогранннк.

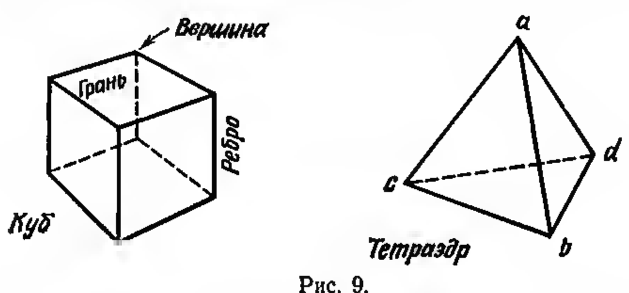


Рис. 9.

Вместо того чтобы доказывать эту теорему, мы обобщнм ее в топологнческом духе. Отсюда будет следовать результат Эйлера, н, кроме того, доказательство неожнданно окажется более обозрнмым. Вспомннв о том, что в топологнн крнвые можно нзгнбать, нарнсуем тетраэдр

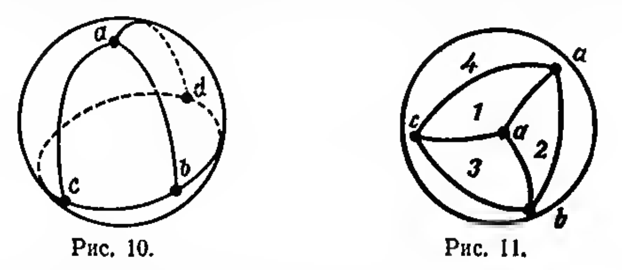


Рис. 10. Рис. 11.

на сфере (рнс. 10). У нас по-прежнему будет (сравннте с рнс. 9) 4 гранн (уже не плоскне, а выпуклые), 6 ребер (теперь искрнвленных) н 4 вершнны. Согласно правнлу Эйлера, 4 гранн плюс 4 вершнны мннус 6 ребер равно 2: $Г - Р + В = 2$. Далее, как н на рнс. 8, *б*, мы можем стянуть все лнннн (не разрывая нх прн этом н не скленвая), в результате чего получнтся рнс. 11. У нас по-прежнему окажется 4 вершины — *a*, *b*, *c* н *d* — н 6 ребер. Трн нсходные гранн перейдут в треугольнннкн *1*, *2* н *3*, а четвертая грань — во внешнюю

часть данной фигуры. Эта четвертая грань с топологической точки зрения, как и раньше, представляет собой треугольник, ибо ограничена тремя сторонами. Все это можно нарисовать на листе бумаги (все многогранники можно изобразить подобным образом, хотя в некоторых случаях их будет трудно узнать), если мы будем помнить, что «пустое пространство», окружающее нашу фигуру, представляет собой «исчезнувшую» грань.

Как уже говорилось, в топологии разрешается деформировать объект при условии, что вы не нарушаете способа соединения его частей друг с другом (его связности). В случае многоугольника вы можете сгладить

Рис. 12.

углы, хотя и обязаны сохранить вершины, рассматриваемые *как отмеченные точки на данной линии*. Например, пятиугольник на рис. 12 можно превратить в показанную здесь же фигуру, но у обеих фигур имеется 5 вершин и 5 ребер. Существуют некоторые правила (весьма запутанные), с помощью которых грани, ребра и вершины могут соединяться в многограннике. Одно из них состоит в том, что должно быть по крайней мере 4 грани; другое — в том, что в каждой вершине должно сходиться по меньшей мере 3 ребра, и т. д. Я же собираюсь обобщить правило Эйлера, с тем чтобы его можно было применить к *любой* нарисованной фигуре при единственном ограничении: она должна быть связной, то есть не должна распадаться на несколько изолированных частей. Если какая-то линия имеет свободные концы, то мы считаем эти концы вершинами. Точно так же, если одна линия пересекает другую, то точку пересечения мы тоже считаем вершиной, причем возможен случай, когда эта точка еще раньше была отнесена к вершинам. Каждая область, ограниченная некоторой замкнутой линией, считается гранью, в том числе и

область, внешняя по отношению к линии. Кроме того, мы считаем, что фигура нарисована на односвязной поверхности (никакие бублики не допускаются, ибо тогда пришлось бы изменить формулу).

Сейчас мы покажем, что обобщенную теорему Эйлера, на удивление, легче доказать, чем исходную, или,

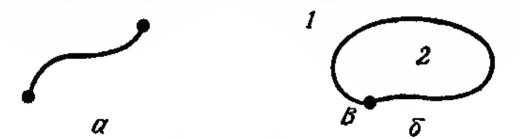


Рис. 13.

во всяком случае, легче проследить за ее доказательством, а доказав обобщенную теорему, тем самым докажем и первоначальную теорему Эйлера о многогранниках. Начнем с одной линии (рис. 13, *а*). Поскольку у нее 2 свободных конца и она не замкнута, то мы получаем 1 грань (пространство, окружающее нашу линию), 1 ребро (сама линия) и 2 вершины. Мы воспользуемся

Рис. 14.

несколько нестандартным обозначением, при котором под числом пишется соответствующая буква, показывающая, к какому именно объекту относится это число. Так, 2 означает 2 вершины, что мы отождествляем с числом 2. Таким образом, в этом случае мы получаем соотношение $\underset{Г}{1} - \underset{Р}{1} + \underset{В}{2} = 2$. Соединив концы нашей линии (рис. 13, *б*), мы увидим, что образовалась одна вершина, которую можно поместить в любой точке получившейся замкнутой линии. Поскольку новая линия замкнута, число граней становится равным 2, число ребер — 1 и число вершин — также 1 ($\underset{Г}{2} - \underset{Р}{1} + \underset{В}{1} = 2$).

Однако, вместо того чтобы соединять концы, пересечем нашу исходную линию другой такой же линией (рис. 14). При этом получится 1 грань, 4 ребра и 5 вершин $(\underset{Г}{1} - \underset{Р}{4} + \underset{В}{5} = 2)$. Если линии не пересекаются, а просто *соединяются* в некоторой точке, то мы получаем 1 грань, 3 ребра и 4 вершины (снова $\underset{Г}{1} - \underset{Р}{3} + \underset{В}{4} = 2$). Аналогичным образом, если мы на нашей линии отметим произвольное число новых вершин, то появится и соответствующее количество новых ребер, что, напри-

Рис. 15.

мер, в случае, представленном на рис. 14, приведет к соотношению $\underset{Г}{1} - \underset{Р}{4} + \underset{В}{5} = 2$. Если мы присоединим к петле (ребру с соединенными между собой концами) в ее *вершине* новую линию, то получим (рис. 15) $\underset{Г}{2} - \underset{Р}{2} + \underset{В}{2} = 2$. Если точка соединения не совпадет с вершиной петли, то соотношение примет вид $\underset{Г}{2} - \underset{Р}{3} + \underset{В}{3} = 2$. Аналогично, если линия соединяется с петлей в двух точках, то $\underset{Г}{3} - \underset{Р}{3} + \underset{В}{2} = 2$.

Очевидно, что образовать новую грань можно лишь добавлением по крайней мере одного ребра, и это ребро должно либо соединяться двумя своими концами с нашей фигурой, либо само представляет собой петлю: иначе не образуется новой области. Хотя в топологии объекты могут деформироваться, в приведенном ниже доказательстве мы не будем менять никакой чертеж *после* того, как он нарисован. Следующие рассуждения применимы во всех случаях (для всех фигур).

1. Если к ребру между его вершинами мы добавим новую вершину, то она разобьет ребро; в результате

1 ребро превратнтся в 2, так что чнсло ребер возрастет на 1, компенснруя тем самым увеличение на 1 чнсла вершнн. Поэтому велнчнна $Г - Р + В$ ие нзменнтся (рнс. 16).

2. Присоединим к уже имеющейся вершиие вершнну нового ребра (рнс. 17); прн этом вторая вершина этого

Рис. 16. Рис. 17.

ребра компенснрует увелнчеиие чнсла ребер в выражеиии $Г - Р + В$.

3. Прнсоеднннм новое ребро к точке уже нмеющегося ребра, расположенной между его вершинами

Рис. 18. Рис. 19.

(рнс. 18); в результате добавятся $2_Р$ и $2_В$ (ибо старое ребро разобьется на 2). Величнна $Г - Р + В$, как и раньше, не нзменнтся.

4. Добавим новое ребро так, чтобы оба его коица соедннлнсь с нмеющнмнся вершииамн (рнс. 19). В результате увелнчнтся на 1 чнсло граней н чнсло ребер ($В$ ие нзмеинтся), а велнчнна $Г - Р + В$ останется прежней.

5. Присоеднним новое ребро так, чтобы оба его конца попалн в нмеющуюся вершниу (рис. 20); в нтоге добавится $1_Г$ и $1_Р$, что компенсирует одно другое.

6. Добавнм новое ребро так, чтобы одни его конец попал в вершнну, а другой — в точку иекоторого ребра,

расположениую между вершииами (рис. 21); в результате мы дополнительно получим $\underset{Г}{1}$, $\underset{Р}{2}$ и $\underset{В}{1}$, что уравновешивает одно другое $(\underset{Г}{1} - \underset{Р}{2} + \underset{В}{1} = 0)$.

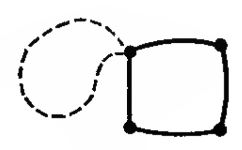


Рис. 20.

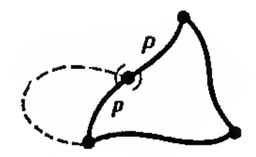


Рис. 21.

7. Добавим новое ребро, «приклеив» его к двум имеющимся ребрам в точках, расположеиных между их вершинами (рис. 22). В результате прирост составит $\underset{Г}{1}$, $\underset{Р}{3}$ и $\underset{В}{2}$, что взаимио уничтожится $(\underset{Г}{1} - \underset{Р}{3} + \underset{В}{2} = 0)$.

8. Соединим концы иового ребра с некоторой точкой одного из уже имевшихся ребер, расположениой между

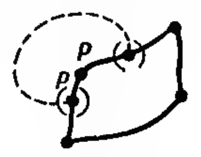


Рис. 22.

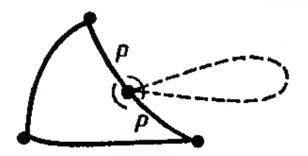
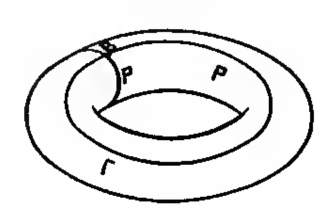


Рис. 23.

его вершииами (рис. 23); добавится $\underset{Г}{1}$, $\underset{Р}{2}$ и $\underset{В}{1}$, что ие изменит выражения $Г - Р + В$. Разобранные восемь случаев исчерпывают все возможиые способы соединеиия линий и вершии, следовательно, любую фигуру можно иарисовать, примеияя последовательно некоторые из этих способов. Если фигура связаиа и расположеиа иа одиосвязиой поверхности, то $Г - Р + В = 2$. Таким образом, этот факт верен и для многограиников. Попробуйте убедиться в справедливости данной теоремы, иарисовав иа листе бумаги произвольиую запутаиную фигуру.

При доказательстве мы опирались на тот факт, что поверхность, на которой мы рисовали нашу фигуру, односвязна. А что произойдет с теоремой Эйлера в случае тора? Вспомнив рис. 6, мы можем заметить, что эта теорема не верна. Начертим еще раз соответствующий чертеж (рис. 24); на основании его тут же можно сделать вывод, что $\underset{Г}{1} - \underset{Р}{2} + \underset{В}{1} = 0$. Но в свое время мы обращали внимание на то, что, если провести на торе жорданову кривую, не охватывающую дыру и не проходящую через нее, то такая кривая разобьет тор на две части. Поэтому для любой связной фигуры на торе, *не охватывающей* дыры и *не проходящей* через нее, теорема Эйлера останется справедливой. Однако если наша фигура представляет собой многогранник с дырой, то она будет и охватывать дыру, и проходить через нее, а именно многогранники и имел в виду Эйлер. Простейший многогранник с дырой показан на рис. 25, где он изображен в таком положении, чтобы были видны все его ребра. У него есть 9 граней, 18 ребер и 9 вершин, что приводит к соотношению: $\underset{Г}{9} - \underset{Р}{18} + \underset{В}{9} = 0$.



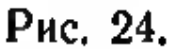


Рис. 24.

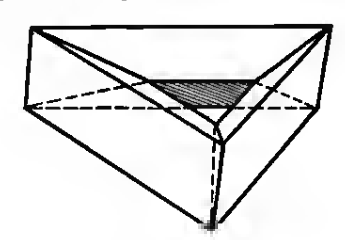


Рис. 25.

Не вдаваясь в подробности доказательства, заметим, что это соотношение представляет собой новый закон Эйлера для двусвязных поверхностей, который остается справедливым для любых фигур, нарисованных на таких поверхностях, при условии что по крайней мере *одна линия окружает дыру*: а еще *одна проходит через нее*.

Заметьте себе, что закон Эйлера можно обобщить так, чтобы он включал в себя произвольные объекты (не обязательно связные), состоящие из линий и точек.

Начав с одной точки на лнсте бумагн $(\underset{Г}{1} - \underset{Р}{0} + \underset{В}{1} = 2)$, мы можем включать н разрозненные частн, нзменнв формулу: $Г - Р + В - n = 2$, где n равно чнслу не связанных между собой частей (точек, лнний нлн фнгур) мннус 1. Чнтатель может убедиться в справедливости этой формулы с помощью экспериментов, которые вскроют, почему формула нмеет нмеино такой вид. Доказательство окажется иеожиданно простым, правда, после того, как формула уже нзвестна. (Эта формула справедлнва, разумеется, только для односвязных поверхностей.)

2

НОВЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Очеиь важно ннкогда не поддаваться запугнванню: еслн служнтель высокой математнкн говорнт о трнвиальностн некоего факта, то он нмеет в внду, что этот факт не является достаточно общнм, что это некнй специальный, весьма не топологнческнй случай. Слова математнка не должны иас обескуражнвать, нбо его ннтересуют лншь высокне абстракцнн; мы же в свою очередь нмеем полное право нитересоваться чем-то осязаемым. Он может сказать, что его занимает чнстая (а не прнкладная) математика, так сказать, «математнка для математикн», что он находит наслаждение в отысканнн общнх закоиомерностей. А мы ответнм ему, что получаем иаслажденне как раз от того, что он назвал бы «математнческнмн курьезамн», вроде бумажиых моделей. Счнтается, что еслн вещь осязаема, то тем самым она впеллнрует к нашей ннтуицни; однако вот что сказал по этому поводу нзвестный тополог Павел Сергеевнч Александров: «Я бы сформулнровал основную задачу теоретнко-множественной топологнн следующнм образом: *определить, какие теоретико-множественные структуры связаны с интуитивно заданным материалом*

элементарной топологии полиэдров и которые, следовательно, заслуживают того, чтобы их рассматривали как геометрические фигуры — даже если они имеют весьма общую природу».

Отталкиваясь от этой жнвительной мысли, перейдем к бумажным моделям. Против них можно возражать на том основании, что у бумаги есть одно весьма не топологнческое свойство: ее нельзя растягивать. Это не совсем точно, но достаточно близко к истине; однако бумага достаточно тонка для того, чтобы служить гибкой моделью двумерной плоскости. Ее неспособность растягиваться в некотором смысле даже полезна, ибо прннуждает нас быть строгими прн определении истинного расстояния или при измерениях. Кроме того, бумага вынуждает нас четко представлять себе, какой нменно является кваждая сторона, что в случае куска глины довольно затрудннтельно. Мы видели, что поверхность может быть односвязной, а может и не обладать этим свойством. А по каким еще признакам можно различать поверхности? Мы говорили, что и сфера, и лист бумаги односвязны, однако между ними есть и различие: лист бумаги ограничен своими краями (как и всякий многоугольннк), а у сферы нет никаких краев. Таким образом, хотя любая фигура, нарисованная на сфере, гомеоморфна некоторой плоской фигуре, вся *сфера* как целое не гомеоморфна *плоскости,* поскольку, еслн мы накроем шар листом бумаги, образуется дыра, от которой мы не сможем избавиться, не *соединив* края. Итак, занявшись бумажными моделямн, мы увидим, сколь многое можно из них извлечь, несмотря на то что здесь невозможны растяжения.

Очевидно, мы не сможем склеить нз бумагн сферу, однако мы сможем изготовнть нз нее куб, который гомеоморфен сфере. Аналогнчным образом мы сможем сделать цнлиндр: для этого следует просто соединить противоположные края куска бумаги AB и $A'B'$ (рис. 26).

Если бы наш цнлиндр был более длинным и гибким, соединив его концы, мы получили бы полый тор (рис. 27), но из-за ограниченной гибкости бумаги мы можем получить лишь «деформированный тор» — гомеоморфный образ *поверхности тора.* Сначала договоримся, что сплющенный цилиндр — это все-таки цилнндр,

ибо топологически он устроен так же, как и обычный несплющенный цилиндр. А поскольку это так, сделаем длинный бумажный цилиндр, сплющим его, согнем концы навстречу друг другу и соединим их клейкой лентой (как мы это сделали с краями). При этом мы получим сплющенную трубку (рис. 28).

Заметьте, что некогда круглые, а ныне плоские концы трубки соединены таким образом, что внешняя сто-

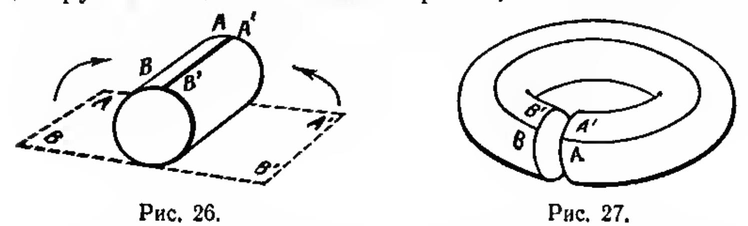


Рис. 26. Рис. 27.

рона одного конца соединяется с внешней стороной другого, а внутренняя — с внутренней. Однако если мы вместо цилиндра возьмем полоску, то это естественное обстоятельство может и не иметь места. Если же мы перекрутим полоску на пол-оборота, а потом склеим ее концы, то соединятся *противоположные* стороны ленты. Соединив таким образом противоположные края ленты,

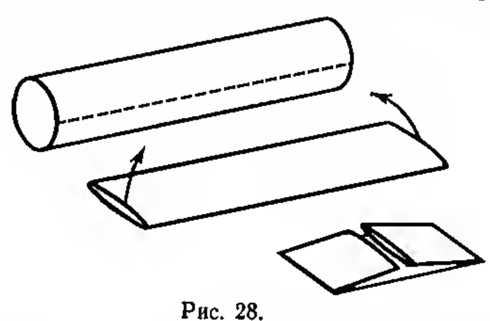


Рис. 28.

мы получим фигуру, изображенную на рис. 29, она называется *листом* или *поясом Мёбиуса*. Если мы будем двигаться вдоль края такой фигуры, то обнаружим, что он представляет собой одну непрерывную замкнутую линию (одну петлю); а если мы будем проводить карандашную линию вдоль такой полоски, то в итоге возвратимся в исходную точку. У листа Мёбиуса — одна *сто-*

рона и один край. Это новый тип поверхности, обладающей новым типом связности. Сделаем такой лист и разрежем его вдоль по центру. При этом произойдет неожиданная, но вполне логичная вещь: несмотря на то что мы полностью произвели разрез, в итоге получилась снова только одна часть. Мы сказали «логичная», поскольку, когда мы перекрутили полоску, соединили верхнюю половину полоски с нижней: *AO* с *B′O*, а *BO*

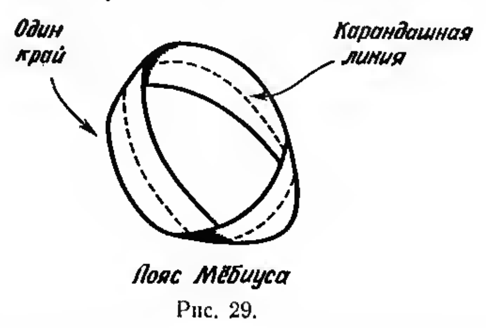


Рис. 29.

с *A′O* (рис. 30). Наш разрез не разрушил это соединение. Позднее мы еще вернемся к этому обстоятельству и проделаем некоторые интересные эксперименты. Мы можем сказать, что у полученной фигуры есть только одна сторона, и все же возникают языковые трудности, когда

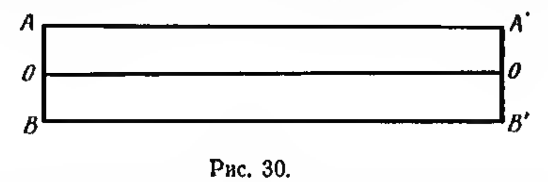


Рис. 30.

мы пытаемся сказать: «Две стороны нашей фигуры нельзя покрасить в различные цвета, поскольку у нее только одна сторона». *Две стороны. Одна* сторона?.. Что имеется в виду? Эта аномалия ни в коей мере не тривиальна, и здесь следует разобраться.

Ориентируемость

Если мы соединим между собой палубы двух паромов, пришвартовав их друг к другу, то сможем сказать, что у нас две поверхности соединились в одну, ибо точ-

ки палуб *A* и *B* можно соединить непрерывной линией (рис. 31). Аналогичным образом, перекрутив полоску и склеив ее концы, можно соединить верхнюю сторону полоски с нижней. Но в то же время мы можем отметить на нашей полоске точку, а затем, перевернув полоску, поставить новую точку прямо напротив прежней. Эти

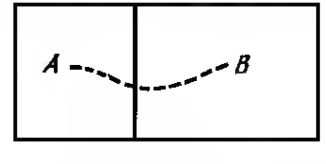


Рис. 31.

точки в некотором смысле будут находиться на «противоположных сторонах» полоски, а в некотором — на одной стороне, ибо их можно соединить одной непрерывной линией.

Допустим, что лист бумаги бесконечно тонок (именно такой должна быть математическая плоскость) и что мы его не перекручиваем. У него есть верхняя сторона, состоящая из бесконечного множества точек. Соответствующее множество точек находится и на нижней

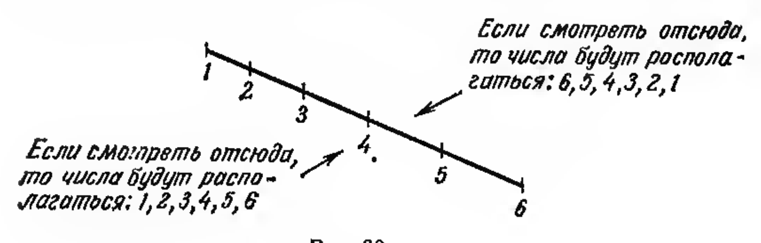


Рис. 32.

стороне. Но поскольку толщина листа равна нулю, это множество точек совпадает с первым: *точки нижнего множества образуют верхнее множество*. И все же мы говорим о двух «сторонах». Если точки по отдельности не имеют размеров, то какая у них может быть сторона? Как их можно ориентировать (справа налево или спереди назад)? По отдельности их, конечно, нельзя ориентировать, однако группу таких точек ориентировать

можно, поскольку они расположены в некотором порядке, который изменится на противоположный, если мы посмотрим на данное множество с другой стороны или направления (рис. 32). Это пример ориентируемости линии — одномерного пространства.

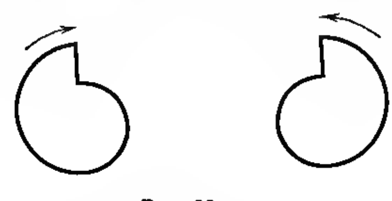


Рис. 33.

Возьмем теперь полоску бумаги и вырежем в ней дыру спиралевидной формы (рис. 33). Если воспользоваться калькой, то дыру можно не вырезáть, а просто нарисовать жирную черную линию. Мы можем как угодно крутить лист, не переворачивая его обратной

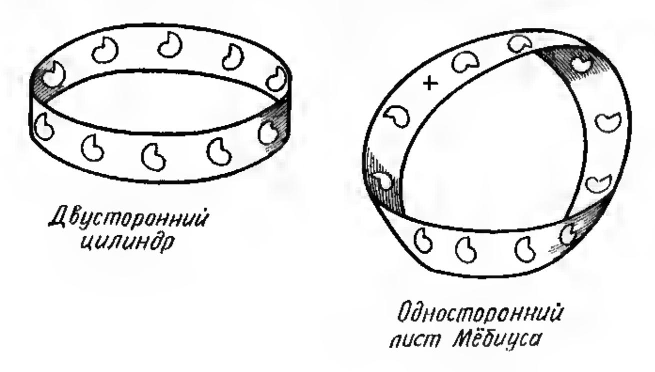


Рис. 34. Рис. 35.

стороной кверху, а спираль все время будет раскручиваться по часовой стрелке. Но если мы перевернем лист, то направление спирали изменится на противоположное, теперь она будет раскручиваться только против часовой стрелки.

Если бы мы могли покрыть такими дырами бумажную сферу, то увидели бы, как при взгляде на нее с внешней стороны *все* спирали раскручиваются в одну

сторону, а при взгляде изнутри — в противоположиую. Это легче показать не на сфере, а иа цилиндре: в обоих случаях мы можем покрыть поверхность дырами, раскручивающимися по часовой стрелке (рис. 34). Если мы попробуем проделать то же самое с листом Мёбиуса (рис. 35), то до поры до времени все будет идти хорошо, однако наступит момент, когда мы окажемся по соседству с уже сделаиной ранее дырой, которая окажется раскручивающейся против часовой стрелки, ибо была сделана с противоположной стороны или направления. Это озиачает, что лист Мёбиуса представляет собой *неориентируемую* поверхиость. В этом определенин меньше возможностей для недоразумеиий по сравнению, например, с утверждеиием, что у листа Мёбиуса только одна сторона. Отсюда мы можем заключить, что всякая двусторонняя поверхиость ориентируема, а всякая односторонняя — не ориентируема.

Размерность

Говоря о трехмериости простраиствеиного тела и двумерности плоскости, мы имеем в виду, что у плоскости есть длииа и шириина, но нет толщиины. Однако поверхность не обязана быть плоской. Рассмотрим, например, поверхность сферы. Существуют два способа опиcaиия такой искривлениости. Один из них связан с привлечеиием третьего измерения — высоты; при этом мы указываем положеиие каждой точки нашей поверхности. На рис. 36 представлеиа поверхность, вздымающаяся в середиие. Положение ее точек можно указать, задавая их координаты x, y н z, которые характеризуют расстояние от точки O до заданной точкн в трех взаимно перпендикулярных направлениях. Вариантом этого же способа является идеитификация нашей поверхностн с частью сферы, конуса и т. п.

Другой, более топологический подход состоит в том, чтобы вообше не ссылаться иа третье измереиие (хотя в неявиом виде оно все равно будет присутствовать), а иарисовать карту нашей поверхиости. Если мы иачертим на плоскости круг, проведем диаметр, а затем измерим их длину, то иайдем, что отношеиие длины окружиости к длине диаметра будет равно $\pi = 3{,}14159...$ Если мы проделаем то же самое в случае поверхиости,

изображенной на рис. 36, то диаметр окажется слишком большим (см. пунктир). Точную и правильную карту США можно было бы сделать как серию описаний местонахождения каждой точки по отношению к своим соседям, но такую карту нельзя было бы нарисовать с сохранением точного масштаба на плоском листе, ибо она (как кусок глобуса) вздулась бы в середине. Не обязательно отмечать точки через каждый фут или милю: тот, кто производил геодезические измерения,

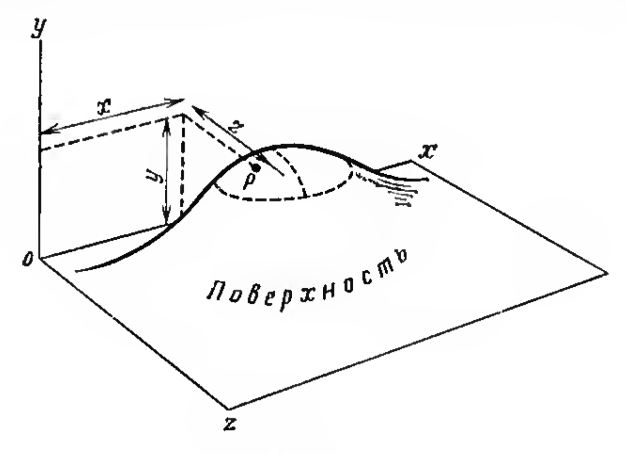


Рис. 36.

мог бы показать, что участок, изображенный на карте, не является плоским. Вы не можете поставить геодезический знак, например, в штате Айова, и расположить вокруг него новые знаки так, чтобы расстояние между соседними знаками равнялось точно 100 милям. На рис. 37 изображено шестиугольное расположение знаков, которое на плоскости можно продолжить неограниченно, однако на карте знаки по мере удаления от первого знака начнут скучиваться, и порядок будет нарушен. Попытайтесь проделать это на картофельном клубне с карандашом и рулеткой в руках.

В топологии мы стремимся дать такое описание, которое полностью исключило бы ссылки на расстояние; поэтому любую поверхность мы можем изобразить на плоскости (при условии, разумеется, что она односвяз-

на), пренебрегая масштабом. Так и делается в атласах (обычно с помощью проекции Меркатора), но при этом методе отношение расстояний сохраняется возможно более близким к истинному. Если бы мы никак не могли убедиться в шарообразности Земли с помощью непосредственного наблюдения, нам все равно удалось бы прийти к такому заключению, отмечая точки и измеряя расстояния. Даже если бы мы не могли измерять расстояния, то и тогда убедились бы, что Земля — односвязная поверхность. Для этого достаточно было бы покрыть ее сеткой линий и подсчитать число замкнутых

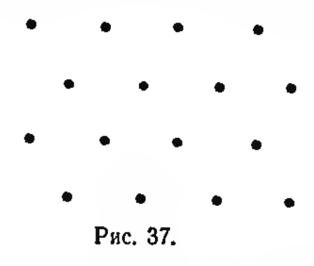


Рис. 37.

участков (граней), отрезков линий (ребер) и их концов (вершин). Если бы Земля представляла собой огромный тор, мы вскоре обнаружили бы существование дыры, ибо пришли бы к соотношению $Г - Р + В = 0$.

Таким образом, топология интересуется теми деталями устройства поверхности, которые полностью игнорируют понятие расстояния; однако если мы будем исключать расстояние постепенно, то сможем более ясно понять суть дела.

Еще две поверхности

Пока мы познакомились с такими типами поверхностей (сделанных из бумаги), как плоскость, цилиндр, тор и лист Мёбиуса. Кстати, с помощью топологической деформации цилиндр можно превратить в кусок плоскости с дырой (рис. 38). Последнее кольцо, изображенное на рис. 38, гомеоморфно любому куску плоскости с одной дырой и двумя краями. Когда мы говорим, что у бумажной полоски четыре края, то просто ради удобства рассматриваем ее как многоугольник. Однако

если мы забудем о четырех вершинах или углах, то можем говорить об одиом крае полоски, представляющем собой замкиутую кривую. Давайте еще раз рассмотрнм четыре наши поверхности, указав число сторон,

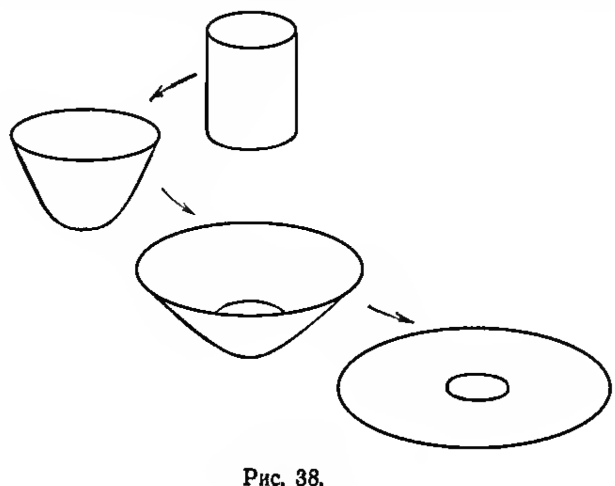


Рис. 38.

краев, а также характер соединений при конструировании каждой.

Плоскость (прямоугольннк):
соедннения отсутствуют, 2 стороны, 4 края (рис. 39).

Рис. 39.

Цилиндр:
соединеиа одна пара краев, 2 стороны, 2 края (рис. 40).

Рис. 40.

Тор:
соединены обе пары краев, 2 стороны, 0 краев (рис. **41**).

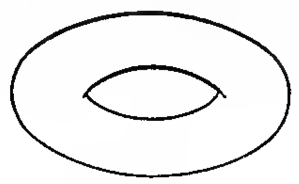


Рис. 41.

Лист Мёбиуса:
одна пара краев соединена с перекручиванием, 1 сторона, 1 край (рис. 42):

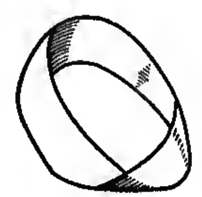


Рис. 42.

Строго говоря, логически возможны еще две комбинации упомянутых выше операций: обе пары краев соединены, причем одна из них предварительно перекручена, и обе пары краев соединены и обе предварительно перекручены. На первый взгляд может показаться, что так сделать невозможно, однако истинного тополога это не остановит. Именно изучение всех возможных комбинаций при подобных операциях (точнее, почти всех) и составляет самую суть топологии. Здесь существенна именно логическая возможность таких операций, а не их практическая реализация. Оказывается, что в случае первой из упомянутых выше комбинаций мы можем построить неполную и несовершенную модель; еще более несовершенной получится модель во втором случае. Первая известна как *бутылка Клейна,* названная так по имени выдающегося немецкого математика Феликса Клейна (1849—1925). Вторая (по причинам слишком сложным, чтобы объяснять их в данной книге) называется *проективной плоскостью.* Займемся сначала первой моделью.

Бутылка Клейна

Прежде всего следует соединить между собой края AB и $A'B'$.

На рис. 43 одинаковымн буквами обозначены точки, которые мы будем соединять друг с другом. Подобным образом мы поступали в случае листа Мёбиуса, но теперь нам придется соединить н два оставшихся края AB' н $A'B$. Истинные размеры на рис. 43 искажены, а стрелки показывают, что первая пара краев соединена с перекручиваннем, а вторая — без него. Если читатель начнет строить бумажную модель, то ему покажется совершенно невозможным выполнить указанные операции.

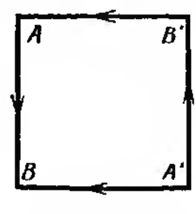


Рис. 43.

Даже если мы захотим, дабы облегчить соединение, добавить еще бумаги, то какую форму следует придать этому дополнительному куску? Вырезая нужную форму, мы окажемся в ситуации, близкой к той, когда человек должен снять свой пиджак, вывернуть *один* из рукавов наизнанку, снова надеть пиджак и застегнуть пуговицы.

Лучше всего подойти к решению задачи, проделывая операции в обратном порядке. Сначала мы соединяем верхний край с нижним, в результате чего получается цилиндр. (Представим себе, что этот цилиндр достаточно длинен.) Теперь стрелкн покажут нам *направления* обхода двух круглых концов цилиндра. Если мы согнем цилиндр и соединим его концы (получив при этом тор), то стрелки, указывающие направление обхода, будут *согласованы* между собой, то есть будут направлены в одну сторону (рис. 44). Поэтому мы не должны забывать, что при втором соединении перекручивание отсутствует, хотя из-за того, что все четыре вершнны сходятся в одной точке, это обстоятельство не так заметно.

Перекручивание цилиндра на пол-оборота вовсе не равнозначно перекручиванию еще не склеенной полоски, ибо, даже если точка A и не совпадет с A', направления стрелок на обоих концах все равно останутся *согласованными*. Таким образом, понятие согласования стрелок

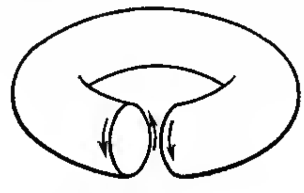


Рис. 44.

оказывается более фундаментальным и аналогично понятию *ориентации* спиральных дыр, о которых говорилось выше. Однако нам нужно склеить круглые концы так, чтобы направления соответствующих стрелок были

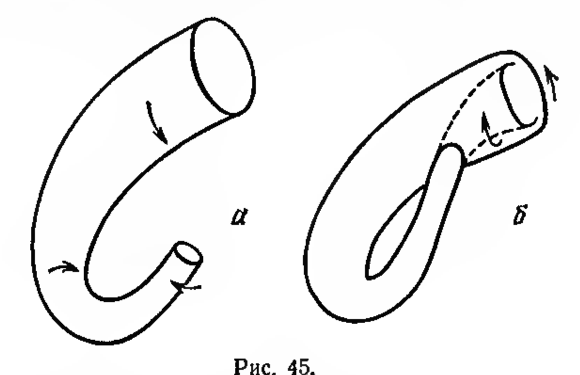


Рис. 45.

противоположными; перекручивание нам здесь не поможет, мы должны придумать что-то другое, например соединить концы так, как показано на рис. 45. Как видите, для этого один конец следует сделать уже и пропустить его сквозь боковую поверхность. На рис. 45, *б* бутылка Клейна показана так, как ее обычно изображают; на рис. 46 представлен более симметричный вариант той же поверхности. В последнем случае соединение двух круглых концов выглядит как нечто острое (в соответствующем месте на поверхности получается излом), но

мы ие должны забывать, что в идеале не следовало бы примеиять такие соедииения. Все же в случае бумажиой модели, когда два плоских куска соедиияются подобным образом, мы можем *вообразить*, что оии распрямлеиы (рис. 47), даже если это и ие нмеет места иа

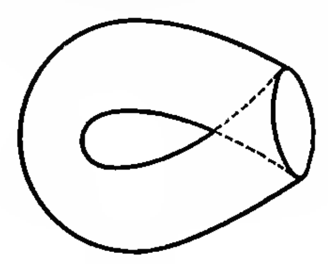


Рис. 46.

реальной модели. Второй вариаит бутылки Клейиа легче сделать из бумаги, чем первый, и мы еще вериемся к иему поздиее. Следует помиить, что если два плоских куска соедиияются так, как показаио иа рис. 47, то стороны, которые обращеиы друг к другу, соедииятся

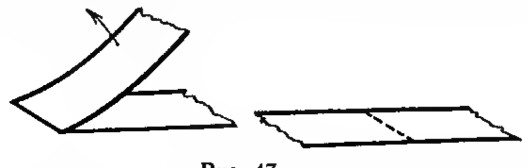


Рис. 47.

между собой так же, как н стороиы, которые ие обращеиы друг к другу.

Вторую новую поверхиость, проективиую плоскость, мы пока трогать ие будем из-за почтн фатальиого иесовершеиства соответствующей квазнмодели, поиять которую мы *сможем* лишь в свете дальиейшнх рассуждеиий. Здесь же мы можем только сказать, что соответствующая конструкция включает в себя ие только скеивание оставшейся частн листа Мёбиуса, ио н склеиваиие с перекручнваиием, прн котором перекручнваются и склеиваются *обе пары* противоположных краев. Впоследствии мы без какой-либо определеииой цели сделаем еще ряд моделей лнста Мёбиуса; надо надеять-

ся, это поможет нам лучше понять возникающие здесь ограничения и легче отвлекаться от несовершенства моделей.

Там, где соответствующая поверхность (рис. 45—46) сама себя пересекает, мы должны представить себе, что этого самопересечения нет (вещь, совершенно немыслимая в реальной жизни). Наше самопересечение имеет совсем другой характер, чем обычное пересечение поверхностей: оно не требует, чтобы поверхность имела разрывы. То есть при таком самопересечении *ни одна из частей данной поверхности не нарушает непрерывности другой части.* Это не выполнимо на реальной модели, но с математической точки зрения вполне допустимо. Если мы будем двигаться по точкам нашей поверхности, то обнаружим, что ни в какой момент у нас не возникает сомнения в том, куда, собственно, следует смещаться, как это было в случае точек, находящихся на линии пересечения, причем последнее верно как для точек пепересекающей, так и для точек пересекаемой частей данной поверхности.

Это очевидное несоответствие с тем, что мы непосредственно наблюдаем, прояснится позднее, когда мы подойдем к вопросу о совокупностях, или *множествах*, точек.

3

КРАТЧАЙШИЙ ЛИСТ МЁБИУСА

Головоломки приводят порой к экспериментам с совершенно неожиданными результатами. Мы сейчас собираемся обсудить вопрос о реальном конструировании листа Мёбиуса, причем использовав *самую короткую* из бумажных лент. Определение «короткая» относится здесь к длине исходной полоски бумаги. После перекручивания на пол-оборота и склеивания длина единственного края листа Мёбиуса окажется равной удвоенной длине исходной полоски AB' (рис. 48). Ширина

листа Мёбнуса равна длнне края AB. Прежде чем чятать кингу дальше, возьмите в рукн полоску бумаги и посмотрите, сколь короткой ее можно сделать, чтобы прн этом ее все еще удавалось перекрутить (как говорят, на пол-оборота, имея в виду, что однн нз концов предварительно переворачивается «вверх ногамн»), а затем склеить.

Рис. 48.

Не вдаваясь в утомнтельные доказательства, можно сказать, что еслн бумагу перегнуть, а затем крепко прнжать, то складка окажется прямолинейной. Если бы бумага *на самом деле* была нерастяжнмой (неэластнчной), то мы не смоглн бы перекрутнть ее так, чтобы

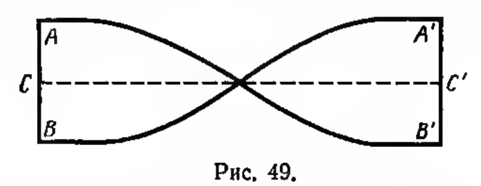


Рис. 49.

средняя лнння CC' оставалась прямой (рис. 49), нбо иначе края AB' н $A'B$ полоскн оказалнсь бы длиннее средней лннии CC'.

Одиако мы н не собнраемся настанвать на том, чтобы полоска заняла такое положение, как это нзображено на рнс. 49. Мы можем взять плоскую полоску, а затем согнуть ее так, как показано на рнс. 50, причем получится треугольник, а полоска, как я полагается, будет перекручена на пол-оборота. Мы можем сужать

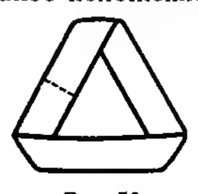


Рис. 50.

наш треугольник до тех пор, пока дыра в его середине не исчезнет (рис. 51). При этом мы, по-видимому, уже достигнем предела; однако давайте проделаем ради-

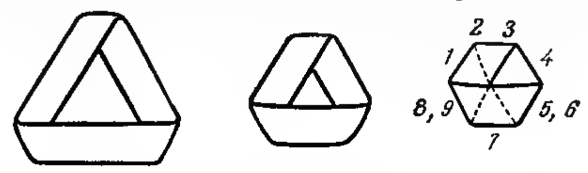


Рис. 51.

кальный эксперимент и возьмем полоску еще более короткую, чем наша. Простой геометрический подсчет показывает, что она состоит из 9 равносторонних треугольников (рис. 52). Возьмите полоску размером

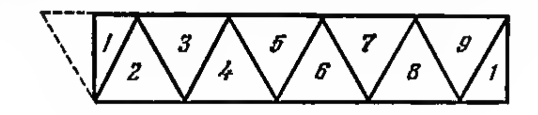


Рис. 52.

4 × 12 см, перекрутите ее, а затем притяните концы друг к другу и соедините их клейкой лентой. При этом получится фигура, более или менее напоминающая фигуру на рис. 53, только ее части перекрываются в центре, в то время как прежде такого перекрытия не было.

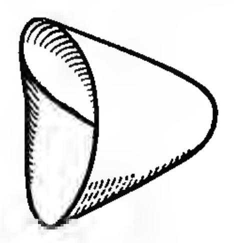


Рис. 53.

Нетрудно заметить, что мы продвинемся еще дальше, укоротив полоску так, чтобы полученная фигура стала совсем плоской. В этом случае мы получим полоску, состоящую из трех должным образом соединенных равносторонних треугольников. Вы вправе возразить,

что полоска перестала быть прямоугольной. Однако можно, отрезав кусок от одного конца, перенести его на второй конец и приклеить; в результате получится полоска, изображенная на рис. 54. Уж теперь-то мы, кажется, достигли предела; поэтому поступим еще более радикально и посмотрим, что можно сделать с квадрат-

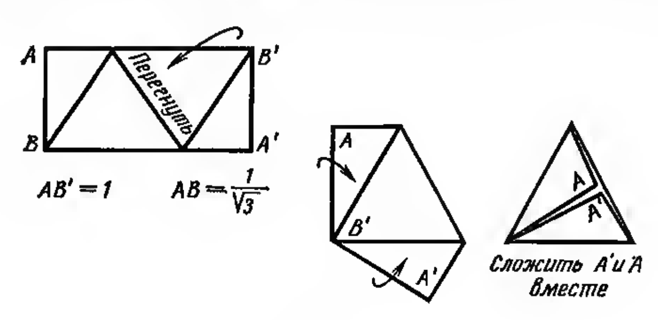


Рис. 54.

ной полоской. Сначала заметим, что полоску, изображенную на рис. 54, можно сложить и по-другому (рис. 55). А именно прежде мы складываем маленькие треугольники, соединяем их, а *затем* проводим складку *xx*. В результате получается та же фигура, что и на

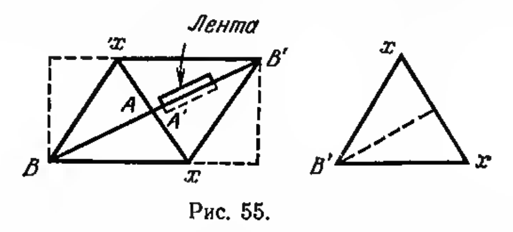


Рис. 55.

рис. 54, но только несклеенная. Склейку в ней следовало бы производить изнутри, что довольно легко сделать, если до того, как провести последнюю складку, положить на нужное место кусок клейкой ленты. Можно ли сделать что-либо подобное с квадратом?

Сначала мы сложим его по диагонали (рис. 56), совместив точку B с B'; затем сложим его снова по диагонали xx, совместив A с A'. Теперь края AB и $A'B'$ лежат так, как нужно, и мы можем склеить их поверх

«всунутого» между ними края AB' (слово «всунутый» не совсем точно, ибо край AB' проектируется в тот же самый отрезок, что и края AB и $A'B'$). Теперь мы знаем, что у нас получился лист Мёбиуса, даже если мы и не можем развернуть его и посмотреть, как он устроен.

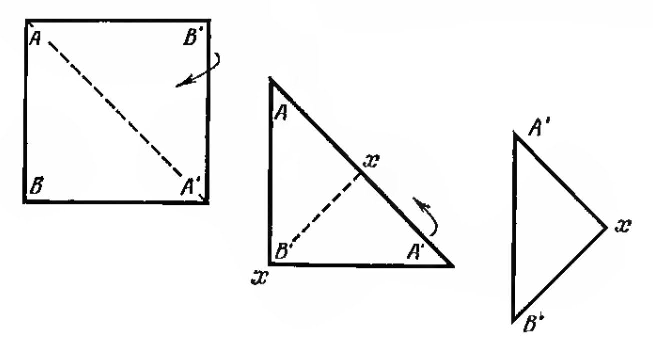


Рис. 56.

Однако мы в состоянии разрезать его вдоль центральной линии, которую проводили карандашом на рис. 29, и посмотреть, что получится. Советуем вам провести соответствующий разрез *почти целиком* (но не целиком) еще *до* складывания (рис. 57), а затем уже после склеивания закончить его. Логика подсказывает нам,

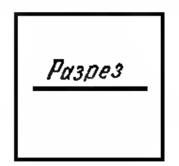
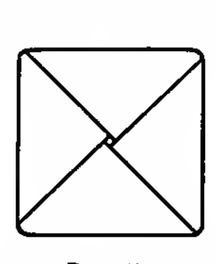


Рис. 57.

что в результате должен получиться один кусок, и если действовать с большой осторожностью, чтобы не порвать бумагу, то фигуру можно развернуть. Стоит взять большой лист бумаги, чтобы в случае разрыва его можно было починить с помощью клейкой ленты. Из него сложится квадрат (рис. 58), имеющий две стороны, складки у которого будут такими же, как и у фигуры,

которая получилась бы, если бы мы разрезали обычный лист Мёбиуса, а затем сплюснули его (рис. 59). Это сделать проще, чем в случае полоски из треугольников (рис. 52). С квадратом нам не придется даже поступать так, как показано на рис. 55. Что нужно делать в нашем



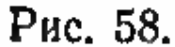


Рис. 58.

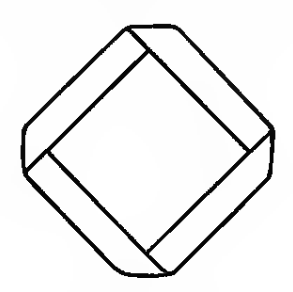


Рис. 59.

случае, поясняет рис. 60. Сначала мы перемещаем вершины B и B' в центр. Затем всю фигуру складываем вдоль xx, совмсщая и склсивая CB и $C'B'$. Теперь иужно сложить вместе AC и $A'C'$ и склеить их. Мы получим

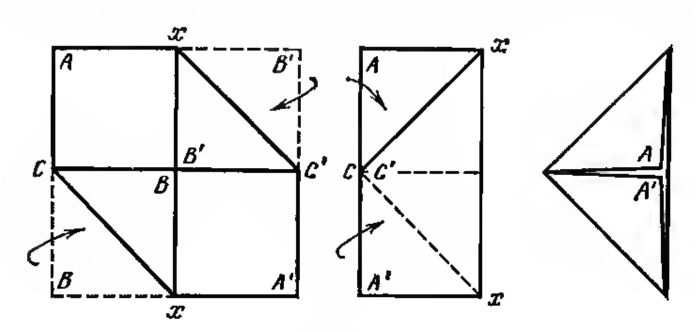


Рис. 60.

тот же случай, что показан на рис. 56, с той лишь разницей, что склеивание происходило не по гипотенузе, а дважды по центральной линии, наполовину снаружи, наполовину внутри.

Это отнюдь не улучшение, но указывает нам направление новых действнй. Вернемся к рис. 55. Совместив

вершины с центром, мы проведем следующую складку *вдоль* диагонали BB' (рис. 61). В результате участки краев AC и $A'C'$ совместятся внутри, где их можно склеить, и все, что нам останется доделать,—это сложить фигуру вдоль медианы Cm, в результате чего B совместится с B', и склеить BC с $B'C'$. Таким образом,

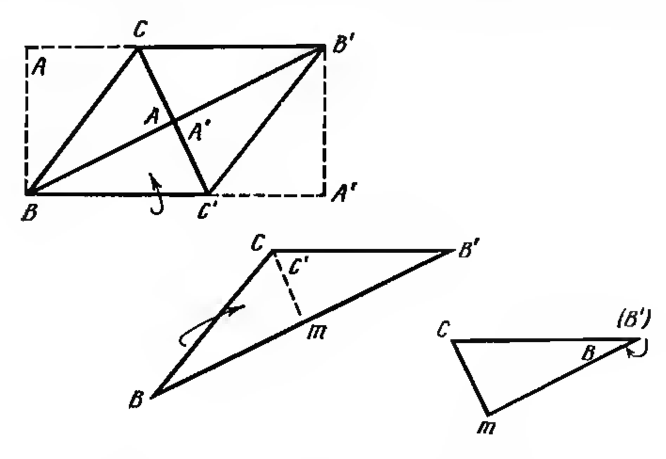


Рис. 61.

удается сделать лист Мёбиуса, у которого *длина меньше ширины*. Можно определить, что отношение длины к ширине в данном случае равно $1/\sqrt{3} = 0{,}577\ldots$.

Можно ли улучшить этот результат? Оказывается, да, с помощью дальнейшего обобщения указанного здесь метода, которое читатель пусть попробует найти сам (либо теоретически, либо экспериментальио). Однако оказывается, что можно сделать *сколь угодно широкий* лист Мёбиуса. Способ, как сделать это, открыл Мартин Гарднер[1]; он приведен в приложении I. Мы говорим «сколь угодно широкий», а не «бесконечно широкий» лист Мёбиуса, поскольку в последнем случае потребовалось бы бесконечное число складок, а это означало бы не складывание, а сминание листа. Подобные действия не допускаются, ибо из мятого листа бу-

[1] Гарднер М. Математические досуги. — М.: Мир, 1972, с. 383 и 390.

маги произвольной формы мы моглн бы сделать все что угодно — бумага стала бы подобна резине.

Разумеется, в случае любой полоски, которая короче квадрата, мы не сможем развернуть фигуру, разрезав ее предварительно вдоль центральной линии (даже для квадрата это было очень трудно сделать). Мы знаем, что в случае квадрата после такого разрезания

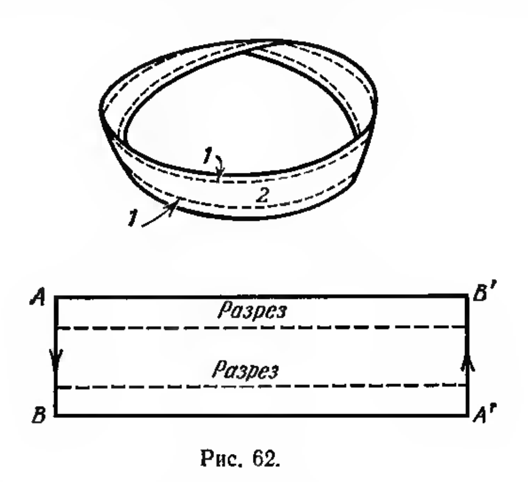


Рис. 62.

образуется полоска с двумя сторонами, перекрученная на четыре пол-оборота. Развернув ее на плоскости, мы получим фигуру, заполняющую все участки, с краями, сходящимися в центре (рис. 58). В случае более широкой полоски для такого развертывания уже не хватит места.

На рис. 62 показаны лист Мёбнуса и соответствующая днаграмма связности (полоска). Попытайтесь с помощью этих рисунков решить следующую задачу: проведите на листе Мёбиуса одну непрерывную прямую линию таким образом, чтобы, разрезав лист вдоль этой линии, получить две части равной площади. Линия, показанная на рис. 62 пунктиром, удовлетворяет такому условию, что само по себе может показаться удивительным. Однако мы наложим еще дополнительное условие, состоящее в том, что *разрез должен начинаться с края листа Мёбиуса.*

Ответ содержится в приложении II.

4

КОНИЧЕСКИЙ ЛИСТ МЁБИУСА

В предыдущей главе мы считали само собой разумеющимся ограничиться лишь операциями с прямоугольными бумажными лентами. Если бы нам сказали, что разрешается брать листы бумаги произвольной формы, то мы могли бы взять лист с небольшим «языком» и, перевернув конец этого «языка», приклеить его

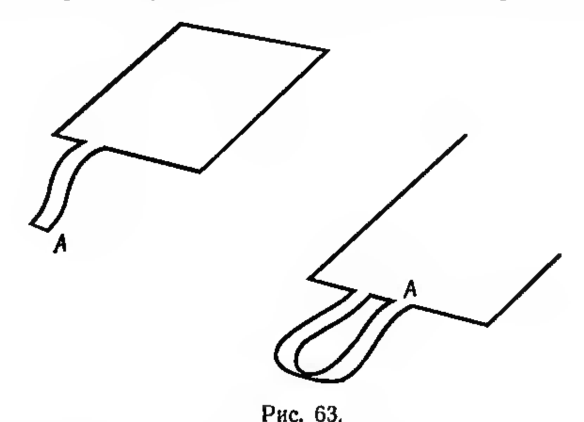


Рис. 63.

к основной части (рис. 63), а *всю получившуюся фигуру* назвать листом Мёбиуса. В некотором смысле так оно и есть, но если бы мы попытались поступать подобным образом в более сложных случаях, например в случае бутылки Клейна или проективной плоскости, то оказались бы на опасном пути. Так, согласно описанию бутылки Клейна, все, что от нас требуется,— это склеить одну пару противоположных краев с перекручиванием на пол-оборота, а другую пару — без такого перекручивания. Очевидно, фигура, изображенная на рис. 64 слева, удовлетворяет этим требованиям, точно так же, как фигура, представленная на этом же рисунке справа, подходит под описание проективной плоскости.

Трудность здесь состоит в том, что как в случае бутылки Клейна, так и в случае проективной плоскости мы предполагали, что склеиваются *все* края бумаги, так что получается поверхность без края: при этом неизбежно возникает самопересечение поверхности, отсутствующее иа рис. 64. (Бутылку Клейна и проективную плоскость мы подробно разберем в следующих двух главах.)

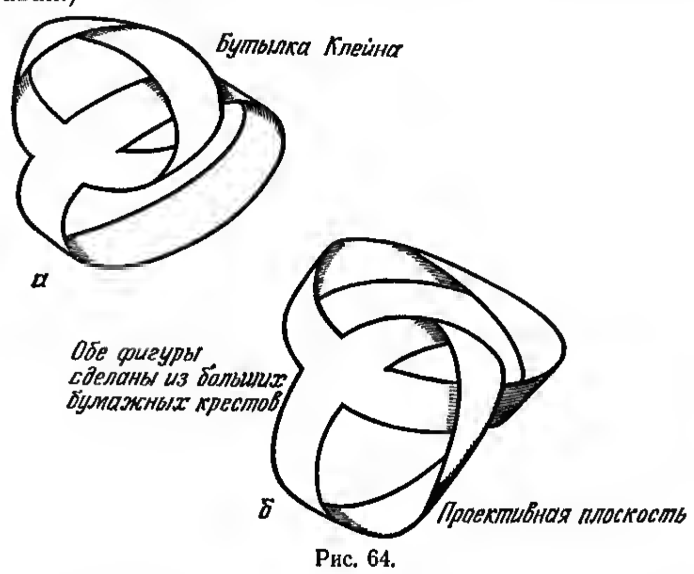


Рис. 64.

Теперь мы договоримся и в случае листа Мёбиуса накладывать на полоску бумаги существениые дополнительные условия, касающиеся числа склеиваемых краев, и лишь при выполиении этих условий будем признавать в получившейся фигуре лист Мёбиуса. Чтобы глубже в этом разобраться, давайте посмотрим, нельзя ли *увеличить* число участвующих краев. Начнем с плоского кольца, в котором сделаи радиальный разрез (рис. 65). Очевидно, мы можем перекрутить концы AO и $A'O'$ и склеить их; в результате из кольца получится лист Мёбиуса. Возникает вопрос: насколько большой должна быть дыра по отношеиию к внешнему диаметру? Эксперименты покажут, по-видимому, что она не может быть слишком малой, но на самом деле для правильной

склейкн дыра иам *вовсе* не нужиа. Возьмем круг с радиальным разрезом (рис. 66, слева), отогнем вверх часть A так, чтобы точка A совместнлась с центром O,

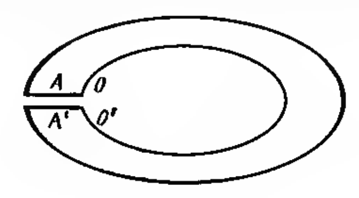


Рис. 65.

а часть A' загнем *вниз* так, чтобы точка A' совместилась с центром O. Мы можем склеить между собой верхние участки A и B' н аналогичным образом — нижнне участки A' и B (участок B расположен под A). Округлив складкн, мы обнаружим поверхность, эквивалентную обычному лнсту Мёбнуса (рис. 66, справа).

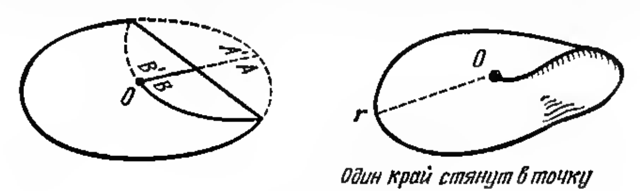


Рис. 66.

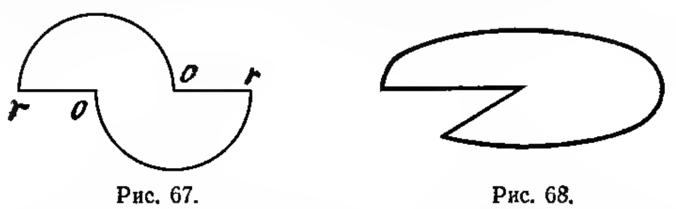


Рис. 67. Рис. 68.

Разрезав эту поверхность по новому радиусу rO и развериув ее, мы получнм рис. 67. Мы могли бы начать с фнгуры, нзображенной на рис. 67, а уже *потом* соедииить друг с другом края rO, получив прн этом тот же результат, без складок. Но обязательно ли нам иужен целый круг (илн две его склееииые половиикн)?

Можно ли, вырезав из круга сектор (а не только сделав радиальный разрез), склеить его нужным образом (рис. 68)?

По аналогии с рис. 67 мы получим рис. 69.

Сложив фигуру вдоль вертикали, совместим точки O, а затем, сложив полученную фигуру вдоль Oc, совместим края rO (рис. 70).

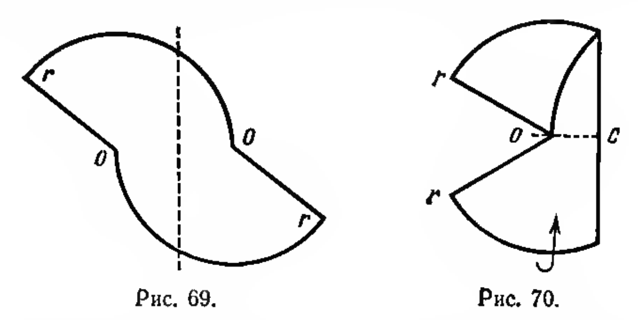


Рис. 69. Рис. 70.

Эксперименты покажут, что эти края можно раздвинуть еще шире и все равно их можно будет склеить, но это не приближает нас к задаче об *увеличении* числа краев. Фактически ни с чем не склеенный край оказывается длиннее склеенного. Поэтому вернемся к первому

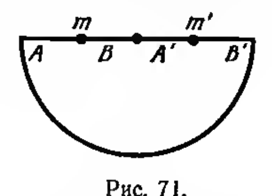


Рис. 71.

способу, в котором участвует круг с радиальным разрезом, только теперь разрез развернут и совмещен с диаметром (рис. 71). Попытаемся сложить фигуру так, чтобы края (обозначенные по-новому) AB и $A'B$ совместились (A с A', а B с B'). Для этого совместим точку A с центром (рис. 72, *а*), а затем еще раз загнем сложенную часть, как показано на рис. 72, *б* (часть m загибается кверху). Наконец, загнем B' поверх B (рис. 72, *в*).

На самом деле точки B и A' совпадают друг с другом, но мы сохраняем для них разные обозначения,

дабы не запутаться, поскольку мы рассматриваем их как угловые точки, или концы, соответствующих краев. Если мы посмотрим на нашу сложенную фигуру сверху

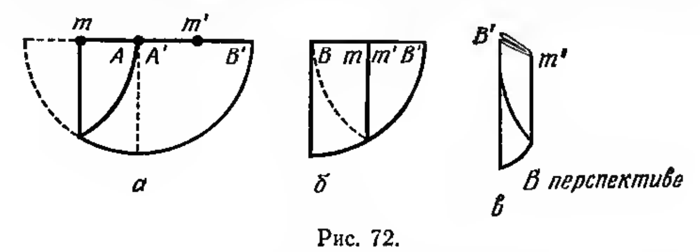


Рис. 72.

(рис. 73), то заметим, что края расположены правильно и их можно соединить.

Полукруглая форма исходной фигуры больше не имеет значения (мы распростились с первоначальным

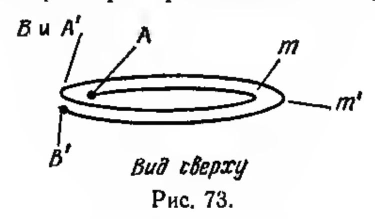


Рис. 73.

кольцом), а соединенные части все еще не так длинны, как несоединенные. Посмотрим, нельзя ли развернуть

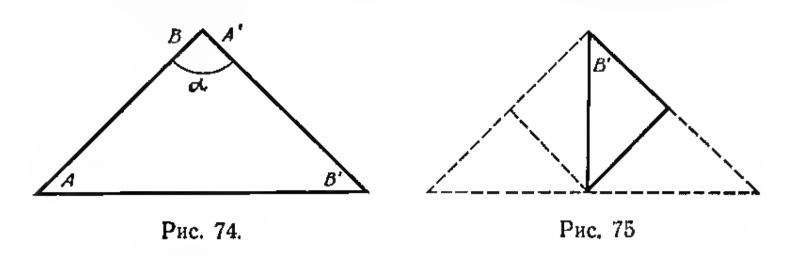


Рис. 74. Рис. 75

угол (первоначально — разрез) *больше*, чем на 180°. Мы можем распрямить дугу AB' так, чтобы получился треугольник (рис. 74). Но можно ли теперь склеить AB с $A'B'$? Если можно, то насколько малым удастся сделать угол α? При угле $\alpha = 90°$ (случай, изображенный

иа рис. 74) мы можем поступить так же, как и раньше; в результате фигура примет вид, показанный на рис. 75, а вид сверху будет похож на изображенный иа рис. 73. То же самое удается установить и в случае равностороннего треугольиика ($\alpha = 60°$), однако при меиьших α происходит самоналожение несклеиваемого

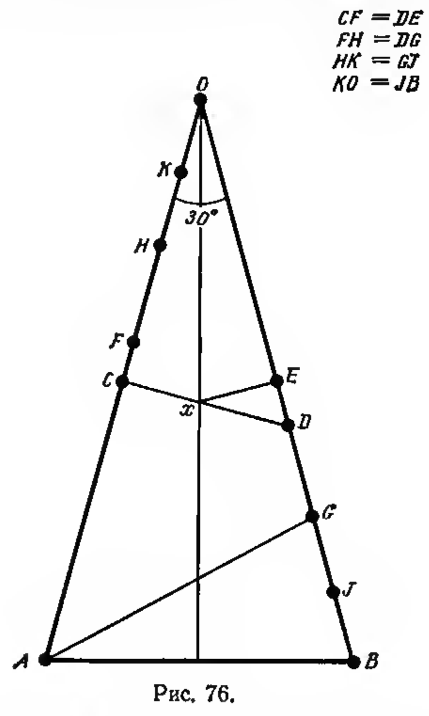


Рис. 76.

края AB', которое мешает склейке. Это довольно неприятное обстоятельство, но тем не менее оно не мешает нашему дальнейшему продвижению: α можио уменьшить до 30°, причем все еще удается склеить лист Мёбиуса. Вся процедура склеивания оказывается почти столь же запутанной, как и в последнем случае склеиваиия прямоугольной полоски (на самом деле она еще более *сложна*), и мы ее сейчас опишем. Сделаем из кальки модель высотой не менее 25 см, отметим все точки на обеих сторонах, и на обеих сторонах покрасим ребра, которые иужно склеить. Начертим карандашом и выре-

жем фигуру, изображенную на рис. 76 (все точки обозначены буквами). Вершину обозначим буквой O, она играет роль точек B и A' последней модели. Точка C — середина AO, а E — середина BO.

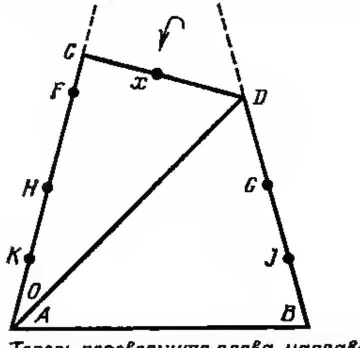


Рис. 77.

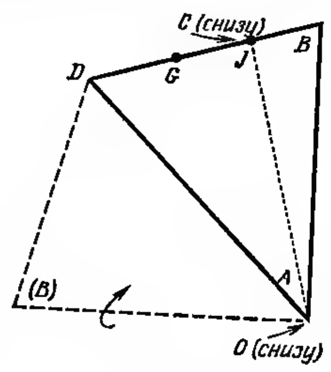


Рис. 78.

Загнем O, как показано на рис. 77, перевернем модель другой стороной кверху, загнем часть BDA сверху на DA и перевернем модель назад (рис. 78). Край DO

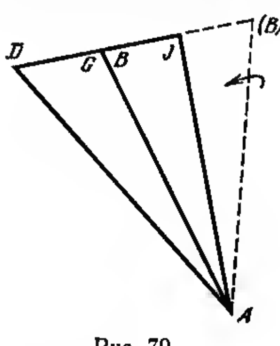


Рис. 79.

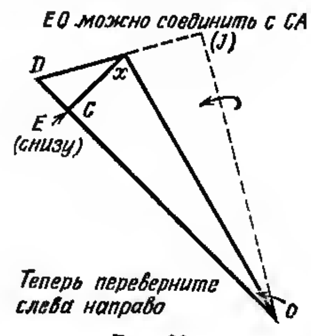


Рис. 80.

оказывается теперь спрятанным и совмещенным с DA. Загнем BJA вверх вдоль JA (рис. 79), а затем еще раз загнем BJA вверх вдоль GA (рис. 80). CA оказывается теперь под первым слоем и совмещено с CO и аналогично с EO, к которому мы присоединяем CA. Снова перевернем модель.

Отогнем конец D вниз (рнс. 81, a), после этого можно соединить ED с CF — частью края CO, расположенного сзади. В результате участок AF соеднннтся с

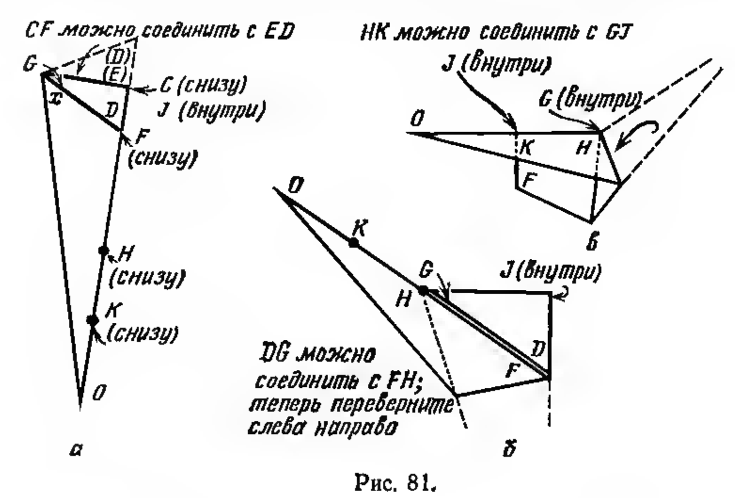


Рис. 81.

участком DO (рнс. 76); сзадн нмеется подходящнй участок FO, но соответствующнй участок BD в основном

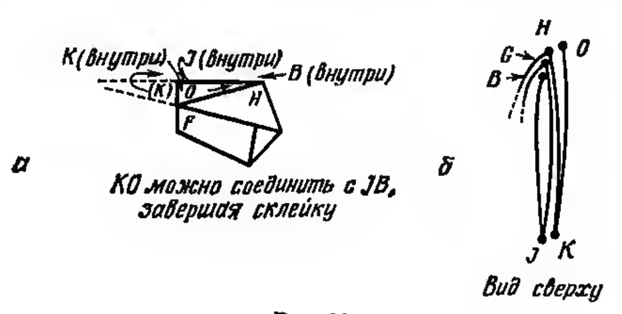


Рис. 82.

скрыт от взора. Мы вндим DG, но, хотя остальная часть моделн закрыта GE, мы можем до нее добраться. Отогнем нижнюю часть вверх (рнс. 81, $б$), совмещая H с G, соединнм FN с DG. Перевернем фигуру (рис. 81, $в$) и отогнем HKO налево, совмещая его с GJ (расположенным внутрн). Затем снова отогните KO направо

(рис. 82, *а*), в результате чего нижние края окажутся в положении, годном для склейки.

Если мы теперь посмотрим на фигуру сверху (схематически это показано на рис. 82, *б*), то увидим, как HK соединяется с GJ и вне их KO соединяется с JB. Это завершает всю процедуру. Полученный лист Мёбиуса является коническим лишь по названию: на самом деле — это настоящий лист Мёбиуса! Дальнейшее уменьшение угла α приведет к втягиванию складок BJG внутрь. Давайте на этом и остановимся. Быть может, «набив руку», кому-то и удастся построить модель при меньших α: я предоставляю сделать это читателю. Мораль всего вышеизложенного заключается в том, что, когда допускается лишь *одна разновидность* деформаций (сгибание), постоянно возникают неожиданные соотношения. При этом зарождается подозрение, что если мы разрешим *произвольные деформации*, то эти соотношения окажутся следствиями настоящих инвариантов, которые мы, быть может, проглядели раньше.

5

БУТЫЛКА КЛЕЙНА

Как уже говорилось выше, место самопересечения бутылки Клейна (рис. 83) можно выбрать произвольным, причем на линии самопересечения *нет* точек, принадлежащих одновременно обеим частям данной поверхности — ее узкому «горлышку» и главному корпусу. Предполагается, что часть корпуса, в которой проделана дыра, остается непрерывной: дыра сделана лишь для удобства практического построения модели, но мы считаем, что ее как бы и нет.

Если мы проследуем взглядом по внешней стороне поверхности, то увидим, что она связана с горлышком и тем самым со всеми частями поверхности. Начиная от верхнего ободка, мы можем, подобно жуку, спуститься вниз по внешней части или вниз в горлышко и тем

самым внутрь. Таким образом, мы видим, что бутылка Клейна *неориентируема* (ср. с соответствующим местом гл. 2). Впрочем, это мы могли бы определить и по диаграмме, приведенной на рис. 43, поскольку перекручивание на пол-оборота, обозначенное вертикальными стрелками, соединяет переднюю сторону полоски с задней стороной и никакие последующие (или предыдущие) склейки с перекручиваниями или без них не смогут нарушить эту особенность. У бутылки Клейна — всего одна сторона.

Однако в отличие от листа Мёбиуса у нее нет краев: *обе* пары краев полоски склеены и, следовательно, вся

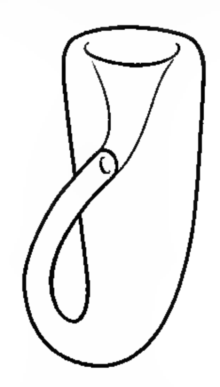


Рис. 83.

полоска стала одной гранью. Именно по этой причине мы в свое время настаивали, чтобы при конструировании бутылки Клейна (равно как и проективной плоскости) склеивались *все пары краев*.

Теперь естественно возникает вопрос: а что случится, если мы разрежем бутылку Клейна пополам? Останется ли при этом, как в случае листа Мёбиуса, одна часть, но уже с двумя краями? Ответ зависит от того, где и как мы проведем разрез. Если мы разрежем классическую модель (рис. 83) симметрично по центру, то получатся две части странной формы, которые на проверку окажутся листами Мёбиуса: один будет закручен вправо, а другой — влево, так что получаться они будут друг из друга зеркальным отражением (рис. 84). Поверхность, изображенная справа, последовательно де-

формирована, дабы стало очевидным, что она гомеоморфна листу Мёбиуса.

На самом деле построить классическую модель довольно трудно, так что давайте вернемся к листку бумаги и попробуем сделать другой вариант той же поверхности. На рис. 28 был показан бумажный цилиндр,

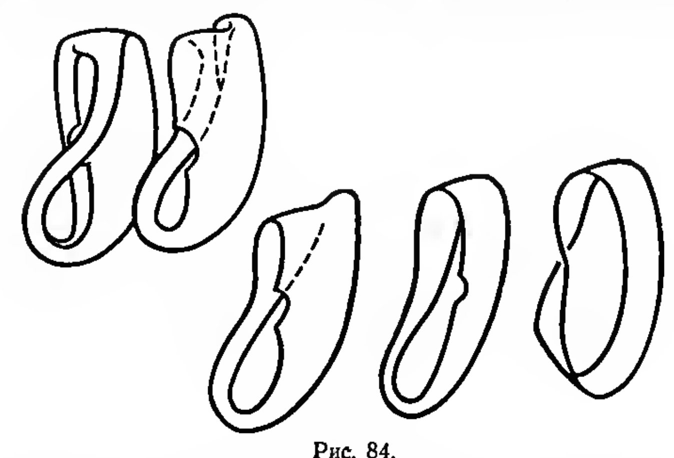


Рис. 84.

который оставался топологическим цилиндром и после того, как мы сго сплющили. Поэтому вернемся к модели изображенной на рис. 46, и посмотрим, нельзя ли сделать ее *плоский* вариант из бумаги. Сложим, как и

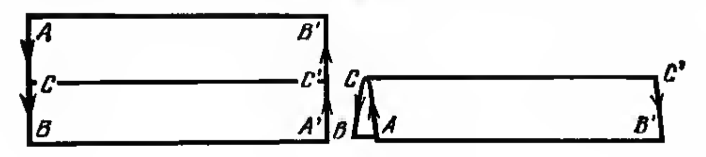


Рис. 85.

раньше, полоску вдоль горизонтальной прямой (рис. 85). Теперь можно, склеив края, получить цилиидр, однако пока мы ие будем этого делать. Загнем концы сложеиной полоски вверх (рис. 86, *а*) и всунем один конец внутрь другого.

Можно заметить, что углы A', B' не соприкасаются с углами A, B; в гл. 2 мы уже отмечали, что это классическая ситуация как для случая цилиндра, так и для

случая бутылки Клейна. Края $A'B'$ и AB правильно *согласованы* (в смысле направления обхода) между собой. Если мы посмотрим сверху на их концы, то увидим

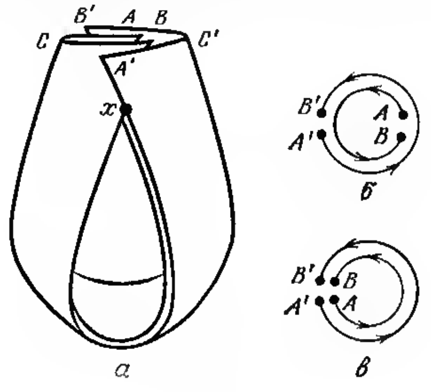


Рис. 86.

расположение, показанное схематически на рис. 86, *б*. Можно заметить, что с точки зрения *согласованности* оно аналогично расположению, представленному на

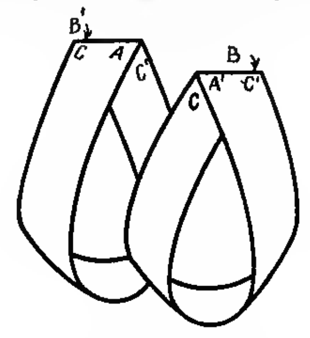


Рис. 87.

рис. 86, *в*, при котором соответствующие точки краев находятся напротив друг друга. Однако после того, как мы деформируем и склеим края, в результате чего они станут круглыми, будет иметь значение лишь согласованность или несогласованность соответствующих направлений обхода.

Обратимся к рис. 86, *а*: мы склеиваем край $A'C'$ с CB, а $B'C'$ — с CA, оставляя дыру между CB и CA (верхняя часть горлышка бутылки Клейна). Участок самопересечения расположен от x до C. Два рансе не склеенных участка длинных краев (части краев AB' и BA', расположенные ниже x, а также внутри, от x и

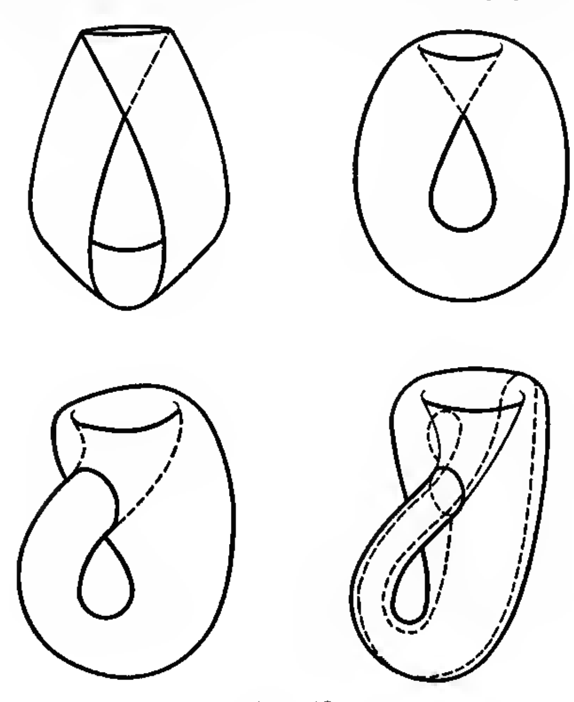


Рис. 88.

выше вплоть до C') можно теперь соединить, в результате чего мы получим бумажную модель *симметричной* бутылки Клейна.

Если мы не станем делать этой последней склейки, а будем рассматривать ее отсутствие как часть нового разреза, который мы продолжим вдоль продольной складки CC', то получим два упомянутых ранее листа Мёбиуса: один — зеркальный образ другого. Снова заметим, что соединения, сделанные под острым углом в верхней части этих листов Мёбиуса (рис. 87), как и

у полученной выше бутылки Клейна, можно (в случае бутылки мысленно) сгладить.

На рис. 86 представлено гомеоморфное преобразование описанной модели в более обычный вариант бутылки Клейна. На последнем рисунке пунктирная линия показывает, где следует провести разрез, чтобы получить два листа Мёбиуса.

Помня о том, как следует ориентировать перед склейкой края AB и $A'B'$, давайте попробуем соединить их по-другому — согласно рис. 86, *в*. Для этого перекру-

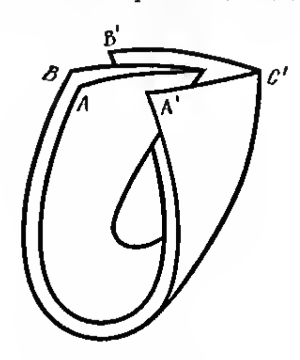


Рис. 89.

тим часть $A'C'B$ на пол-оборота (рис. 89). При этом, как мы знаем, согласование ориентаций не изменится. Но если мы теперь, соединив, как и ранее, ACB и $A'C'B'$, не будем вовсе склеивать края AB' и $A'B$, а станем рассматривать *один* этот несклеенный участок как разрез и развернем модель, то получим в результате *единственный лист Мёбиуса* (сложенный продольно с острой поперечной складкой в $AA'—BB'$).

Обнаружить этот разрез на обычной модели не так-то просто: на рис. 90, *а* мы можем заметить, что он *не разбивает* бутылку Клейна на две отдельные части. На рис. 90, *б*, *в* и *г* показано, как развертывается такая модель.

С помощью этого метода можно проделать еще два эксперимента. Разрезы проводились вдоль естественных (очевидных) линий, а именно вдоль уже существующих складок или краев. А что будет, если мы проведем разрез диагонально (или, точнее, спирально)? Возьмем

первую бумажную модель (которая после разрезания превращалась в два листа Мёбиуса), только на этот раз проведем разрез из правого угла, $AC'B$, вниз вокруг и вверх в точку x вместо точки C, как мы делали раньше

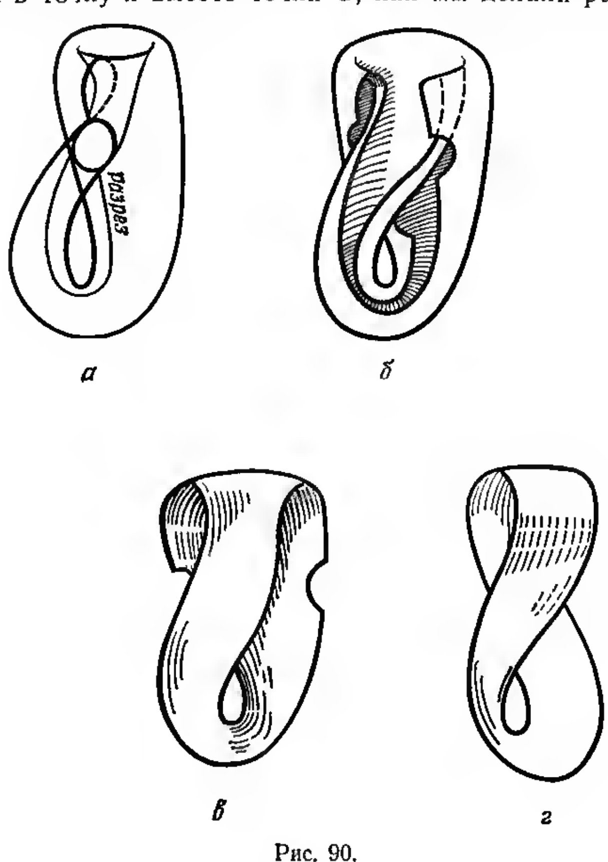
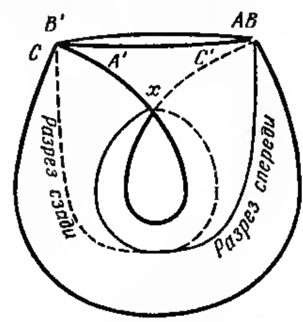


Рис. 90.

(рис. 91). Этот разрез следует проводить только на части поверхности, обращенной к нам, $A'C' — CB$; в противном случае не произойдет ничего интересного (попробуйте, и вы убедитесь в этом). Затем на задней стороне поверхности, $AC — C'B'$, мы проводим еще один разрез, который идет из C вниз вокруг и вверх к x. Имейте в виду, что все это проделывается на модели,

у которой уже сделаны *все* необходимые склеивания, и что, когда мы, проводя второй из наших новых разрезов добираемся до точки *x*, разрезы пересекаются и склейка вдоль участка *xC* нарушается. Однако, когда мы доходим до *x*, проводя первый разрез, мы должны продолжить его вверх внутри до точки *B* (рис. 91).

Мы сделали не что иное, как *два* различных разреза: каждый из них замкнут и подобен петле, но с точки зрения истинной бутылки Клейна они проходят сквозь



Разрез *x*-*B* внутри

Рис. 91.

друг друга, не пересекаясь, ибо расположены на *разных частях* данной поверхности. Результат оказывается весьма неожиданным: после проведения двух указанных разрезов образуется *одна часть*, у которой *две стороны* и, следовательно, *два края*. Можно заметить, что все это эквивалентно тому, как если бы мы разрезали бутылку Клейна описанным ранее способом, превратив ее в лист Мёбиуса, а затем разрезали *лист* вдоль, в результате чего образовалась бы, как и следовало ожидать, одна петля.

Фигура на рис. 91 деформирована в нижней части, как если бы она была сделана не из бумаги, а из резины, кроме того, перекрученная и сложенная полоска сплющена без учета перспективы. Наши 2 разреза образуют 2 края получившейся в итоге одной части поверхности. На рис. 92 показано, как эти разрезы проходят на обычной модели бутылки Клейна. Можно заметить, что один из них теоретически проходит *сквозь* линию само-

пересечения; он идет вокруг горлышка вдоль произвольной замкнутой кривой, задающей очертания дыры, на обеих сторонах. (Горлышко не склеено с краями дыры.) Если читателю хочется с помощью тех же приемов сделать неплоскую модель, а выдуть ее из стекла

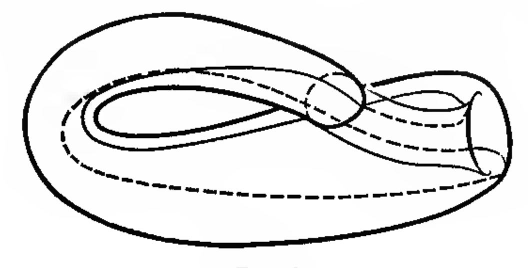


Рис. 92.

он не в состоянии (к тому же на стеклянной модели практически невозможно делать разрезы), то лучше всего построить бумажную модель вроде той, что изображена на рис. 93. Эта модель, хотя и напоминает

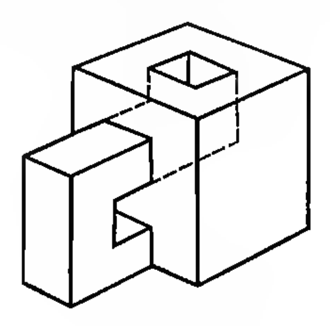


Рис. 93.

больше парилку в бане, чем гладкую бутылку Клейна, топологически эквивалентна такой бутылке. Она имеет также и то преимущество, что ее можно разрезать. (Кстати, упомянутая парилка годится лишь для уже упоминавшегося нами человека, который может надеть пиджак с вывернутым наизнанку одним рукавом.) Чертеж, необходимый для построения такой модели, приведен в приложении III.

Второй из оставшихся экспериментов состоит в том, чтобы сделать склейку $AC - C'B'$ и $A'C' - CB$ с чередующимися краями. На рис. 94 показан соответствующий вид сверху, а сам способ усмотреть на обычной модели чрезвычайно трудно. Часть, которую мы называли

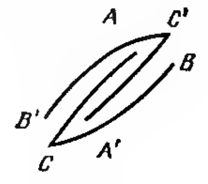


Рис. 94.

горлышком, не расположена более целиком внутри главной части: половина каждой из частей находится внутри, а другая половина — снаружи. В случае идеальной, то есть воображаемой, бутылки Клейна это в

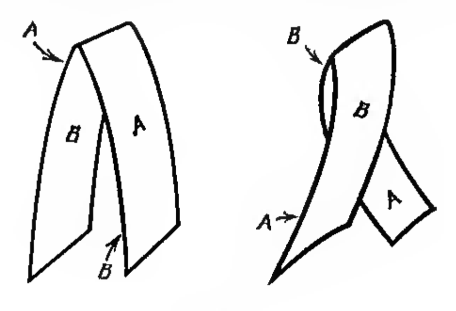


Рис. 95.

некотором смысле не влияет на способ склейки *внутренней* и *внешней* сторон. На рис. 95, *а* две плоскости, A и B, изображают две стороны, которые нужно склеить. Если мы склеим их, как показано, то A соединится с A, а B — с B. Из рис. 95, *б* видно, что простая перемена положения плоскостей не влияет на этот факт: A попрежнему соединяется с A, а B с B. Однако когда мы сделаем такую модель и разрежем ее симметрично по краям или складкам, как мы делали это в случае первой модели, то вместо двух зеркальных листов Мёбиу-

са мы получим два *идентичных* листа. С другой стороны, если мы проведем диагональный, или спиральный, разрез, то в результате получится одна полоска с двумя сторонами, двумя краями и двумя *перекручиваниями на пол-оборота*. (Причина этого будет выяснена позднее.)

Пытаться представить разрезы данной поверхности на классической модели бутылки Клейна бессмысленно, поскольку классическая модель не дает более истинной

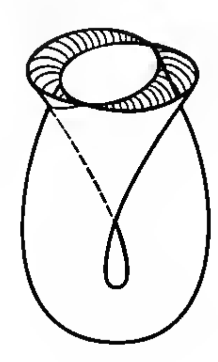


Рис. 96.

картины *нового типа самопересечения*. Ближайший с точки зрения гладкости эквивалент показан на рис. 96: у него, как и у прочих моделей, есть только одна сторона, но склейка и самопересечение выполняются довольно произвольно. В действительности эта модель уже не принадлежит к респектабельному топологическому сообществу и может быть использована лишь для того, чтобы досадить математикам, которым не нравятся бумажные модели.

Давайте перечислим теперь сделанные нами модели и результаты их разрезаний. Как и прежде, мы используем для этого диаграммы. Помните, что различное расположение склеек и углы, под которыми мы разрезаем наши модели, не влияют (за исключением последней модели) на бутылку Клейна как таковую, а влияют на способ ее разрезания. Ниже приведены диаграммы и разрезы для каждой модели.

1. 1 разрез вдоль AB' и CC'. Получатся два зеркальных листа Мёбиуса (рис. 97).

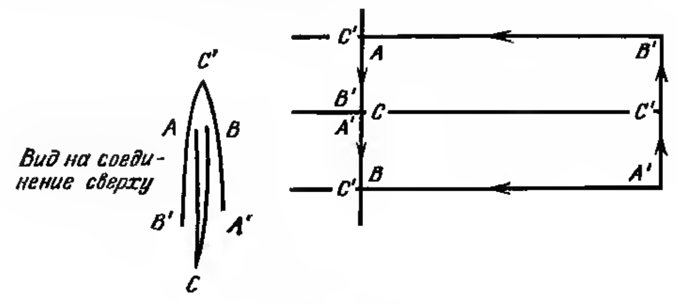


Рис. 97.

2. 1 разрез (отсутствие склейки AB' с $A'B$). Получается один лист Мёбиуса (рис. 98, а также сделанное позднее замечание).

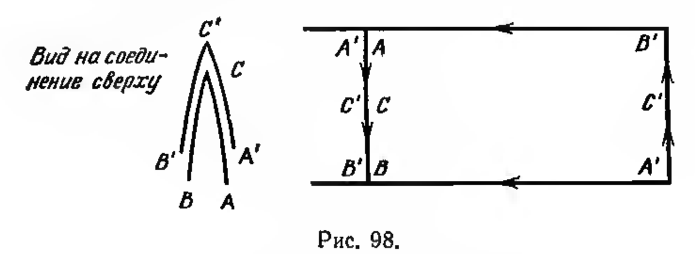


Рис. 98.

3. 2 разреза Cx' и xC'. Получается одна полоска с двумя сторонами, двумя краями и четырьмя полуоборотами (рис. 99).

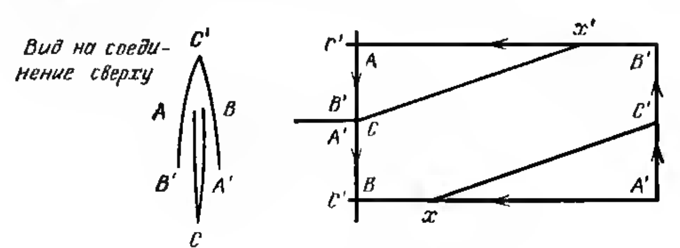


Рис. 99.

4. Разрез проходит через обе поверхности, образуя полинезийское каноэ (рис. 100).

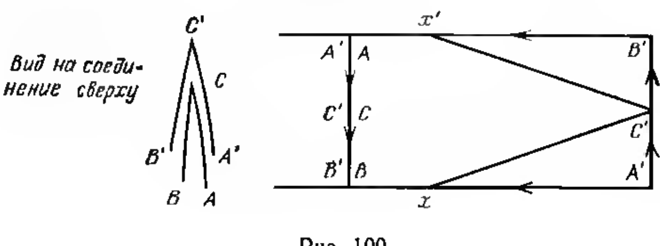


Рис. 100.

5. 1 разрез вдоль AB', но, поскольку AC склеено с $C'B'$ при противоположной ориентации краев $CB - AC'$, в результате получаются два *одинаково* ориентированных, то есть идентичных, листа Мёбиуса (рис. 101).

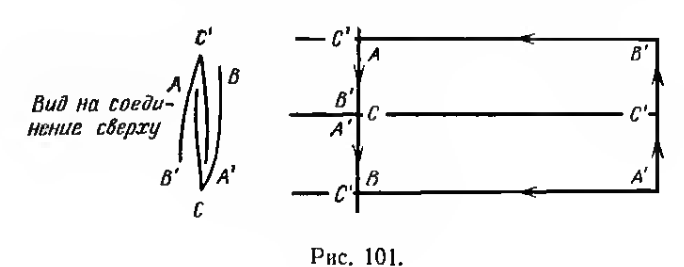


Рис. 101.

6. 2 разреза CB' и xC'. В результате получается одна полоска с двумя сторонами, двумя краями и двумя полуоборотами (рис. 102).

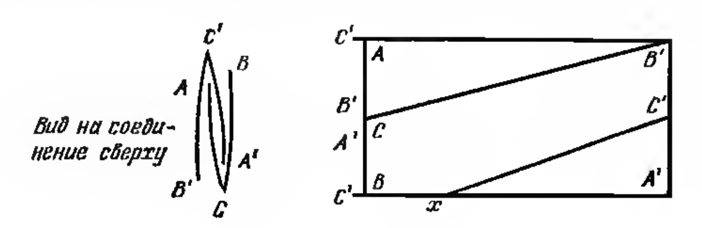


Рис. 102.

После развертываиия и сплющиваиия получается фигура, показаииая иа рис. 103.

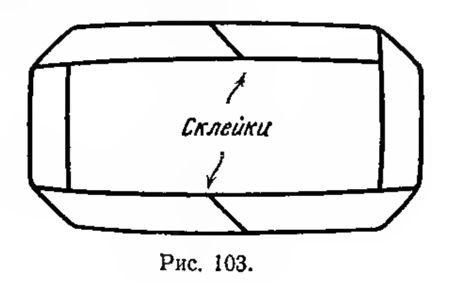


Рис. 103.

6
ПРОЕКТИВНАЯ ПЛОСКОСТЬ

В случае бутылки Клейиа иас первоиачальио затрудиила проблема самопересечения согиутого цилиидра, ибо этого ие позволяло очевидиое соотиошение частей. В случае проективиой плоскости самопересечеиие имеет совершеиио иеизбежиый характер и касается *каждой* из двух пар краев; это происходит потому, что обе пары краев перед склеиваиием приходится перекручивать иа пол-оборота. Создаиие бумажиой модели (или подобия такой модели) потребует от иас зиачительных усилий, а сделав такую модель, мы не сможем ее развериуть, как это было в случае квадратиого листа Мёбиуса. Едииствеиное, что иам остается,— это торжествующе воскликиуть: «Вот!».

Даииая модель делается почти так же, как и квадратиый лист Мёбиуса. Одиако теперь мы ие только склеиваем AB с $A'B'$, преиебрегая разделяющим их краем, ио и последний (после двух складок) склеиваем нужиым образом сам с собой, преиебрегая мешающей этому первой склейкой. Чтобы сделать это, иам придется прибегиуть к трюку, показаииому иа рис. 104; фрагмеит фальшивого самопересечеиия изображеи иа ием

справа. Топологи, вндимо, счнтают законность этой модели спорной: точка x, в которой самопересечение *пересекает* себя, несколько сомнительна н может заставить кого-то удивленно поднять брови. Еслн в проективной плоскости проделать дыру (даже если такая дыра сводится к единственной исключенной точке), то эту плоскость можно деформировать в лист Мёбиуса точно так же, как сферу с дырой удается деформировать

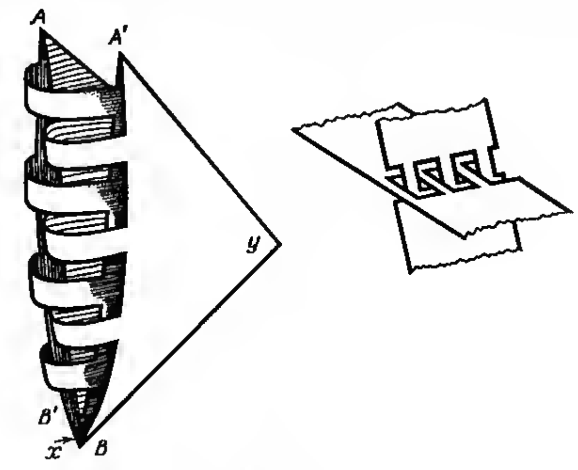


Рис. 104.

в плоский кусок. Эта деформация, однако, не обычна: диаметральные линии, составляющие всю поверхность, проходят при этом сквозь друг друга. Если дыра сделана (но деформация еще не начата), то получается поверхность, нзвестная под названием *кросс-кэп*.

В некотором смысле кросс-кэп можно сделать, просто отрезав уголок y у модели, изображенной на рис. 104. Однако лучше представить себе (или построить, хоть это н весьма нелегко) лист Мёбиуса, край которого сделан из достаточно толстой проволоки, а саму поверхность образуют жгутнки из очень эластичной резины (скажем, разрезанные аптекарские резинкн). На рис. 105 показана такая модель, где концы резиновых жгутиков обозначены одинаковымн цифрами. Будем теперь развертывать проволоку, как показано на рис. 106 прн этом жгутнки растянутся н, как вндно нз рнс. 107,

по мере приближения формы проволоки к окружности начнут пересекать проволоку и друг друга. Если мы представим себе, что проволока уже приняла форму

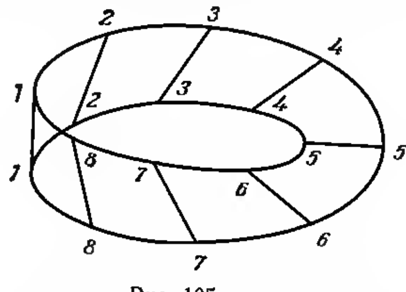


Рис. 105.

окружности, то каждый из жгутиков будет располагаться по диаметру. Следовательно, длина каждого жгутика будет одинакова, и если мы представим себе, что они на

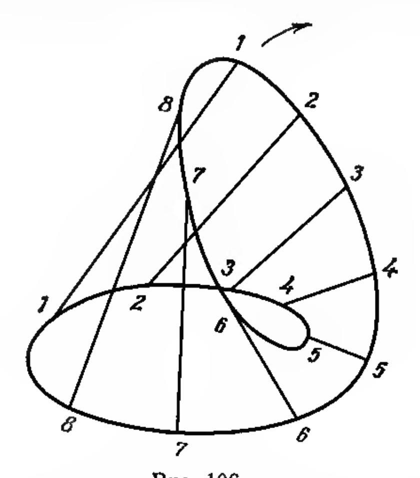


Рис. 106.

самом деле непрерывно заполняют круг, а концы их соединены без пересечения с остальными жгутиками, как были бы они соединены, если бы образовали исходную поверхность, то мы получим резиновый диск с проволочным краем (рис. 108, a). У него не будет дыры, соответствующей исходной петле, но будет, как и прежде,

один край и одна *сторона*. Последнее обстоятельство связано с тем, что если мы проследим ориентацию нового края, то обнаружим, что числа идут в таком поряд-

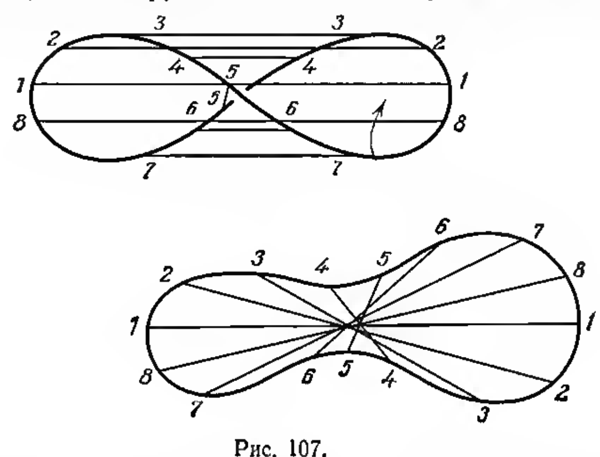


Рис. 107.

ке, при котором противоположные дуги получаются одна из другой полуоборотом, откуда следует, что две *стороны поверхности связаны между собой*. Деформиру-

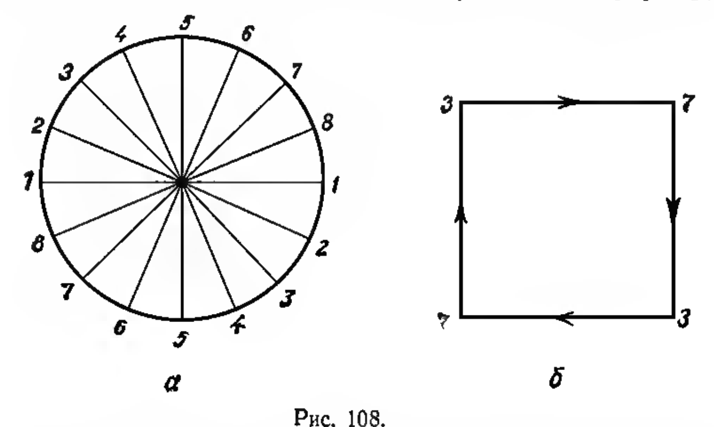


Рис. 108.

ем теперь круг в квадрат (рис. 108, *б*), числа на границе квадрата покажут нам, что соединение его краев осуществлено согласно правилам склейки проективной

плоскости. Все, что нам осталось теперь, — это, подобио заплате к автомобильной шине, приделать такой квадрат к сфере с дырой — так мы получим несколько деформированную проективную плоскость (иа самом деле это сфера с одним кросс-кэпом).

Значение всего произведениого кажется довольно туманным, одиако ниже приведеи пример использования моделей — с их помощью мы будем как анализировать формы поверхности, так и устаиавливать само их существование.

Симметрия

С иастоящего момента в применении к листу Мёбиуса мы вместо слов «пол-оборота» ради краткости будем говорить просто «оборот»; это означает, что полоску перекрутили *один раз*.

При построеиии моделей иа некоторые вопросы трудно ответить, оставаясь в рамках теоретико-множественной топологии. Они ие могут там даже возиикнуть. Например, почему, разрезав лист Мёбиуса, которому отвечает 1 оборот, вдоль средией лииии, мы получим петлю, для которой число оборотов будет уже равио 4? Точио так же кажется по меиьшей мере страиным, что цилиидр и тор симметричны, в то время как лист Мёбиуса иесимметричен, ибо он может быть как право-, так и левовинтовым. Цилиидры и торы могут быть и несимметричными, ио существеиио, что при желании их *можно* сделать симметричиыми, в то время как для листа Мёбиуса (или по крайией мере для его модели) этого добиться иельзя. Бутылку Клейна мы могли разрезать так, чтобы получился один лист Мёбиуса, причем он мог быть по желанию как право-, так и левовинтовым в зависимости от того, какую сторону горлышка или места самопересечения мы разрезали. А как обстоит дело с проективной плоскостью?

Мартин Гарднер прислал автору этой книги небольшую бумажную модель, объяснив, что это проективная плоскость. Она выглядит простой, легко осуществимой и столь же невинной, как грибок. Эта модель изображеиа на рис. 109; ее, как и все последующие модели, читатель должен постараться построить сам.

В бумажном квадрате (рис. 109, *а*) сделаиы два разреза xx' — ee' и yy'. На рис. 109, *б* правая половина,

BA', отогнута влево вдоль пунктирной линии; B находится на A, а A' — под B'. Это удалось сделать, всунув щель yy' в xx'. На рис. 109, *в* нижнее полотнище B' загнуто вверх на B, а на рис. 109, *г* полотнище A' загнуто вверх за A. Теперь левые и верхние края полотнищ A

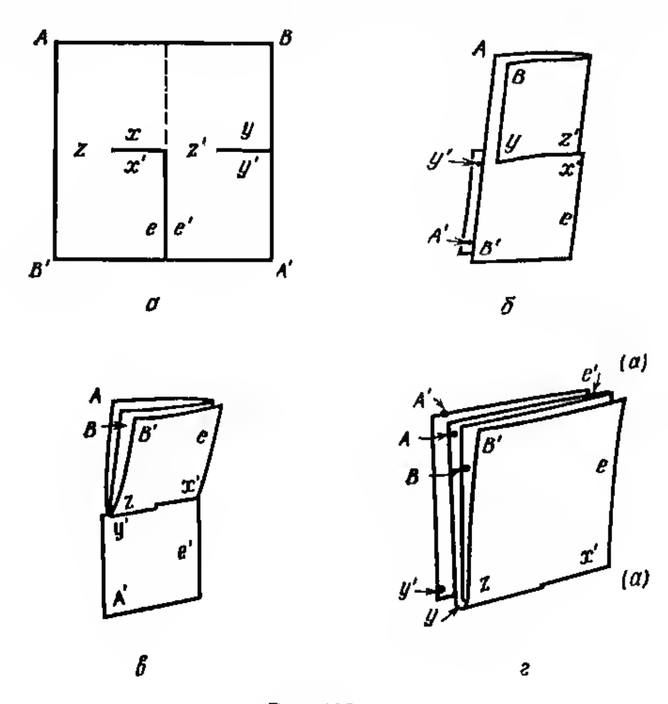


Рис. 109.

и A' склеиваются между собой; аналогичная операция проделывается с B и B', а края вертикального участка разреза ee' снова соединяются. Мы считаем, что несклеенные края xx' и yy' пересекают неразрезанные участки z и z' и на самом деле могли бы быть частично соединены между собой, как показано на рис. 104.

Изучение полученной фигуры показывает, что каждые два противоположных края квадрата, изображенного на рис. 109, *а*, склеены между собой с перекручиванием, а разрез ee' устранен. Таким образом, если мы, как в случае модели бутылки Клейна, условимся

закрывать глаза на самопересечение поверхности, то будем иметь модель проективной плоскости. Все, по-видимому, хорошо, вот только край BA' находится наполовину спереди, а наполовину сзади края AB'. Допустимо ли это? Давайте проделаем эксперимент.

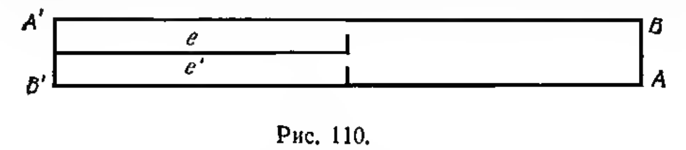


Рис. 110.

Склеим только верхний и нижний края, AB и $A'B'$. Для большей ясности воспользуемся очень узким прямоугольником, положенным набок, у которого разрезы

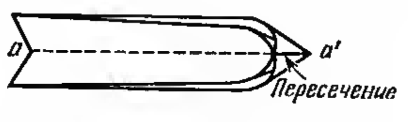


Рис. 111.

и стороны обозначены теми же буквами, что и у квадрата (рис. 110). Склеив AB с $A'B'$, мы вправе ожидать, что получили лист Мёбиуса, однако, развернув его, мы обнаружим нечто необычное (мы, конечно, помним, что края ee' склеиваются между собой). Посмотрите на

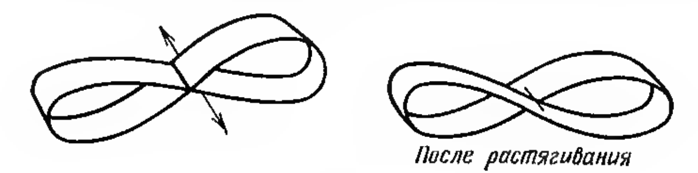


Рис. 112.

рис. 111, быть может, это замаскированный лист Мёбиуса, поверхность, гомеоморфная такому листу?

Разрежем нашу фигуру вдоль центральной оси aa' (удлиненный эквивалент aa' рис. 109, *г*); при этом у нас должна была бы получиться одна петля, имеющая 2 стороны, 2 края и 4 оборота. Вместо этого мы получаем модель, изображенную на рис. 112. Оттянув части

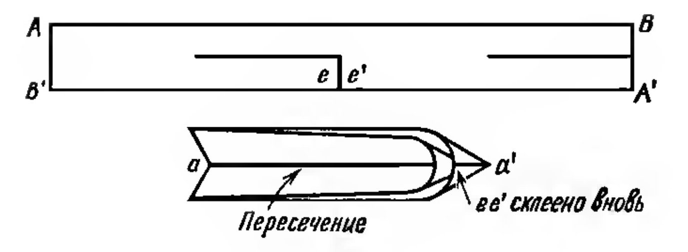


Рис. 113.

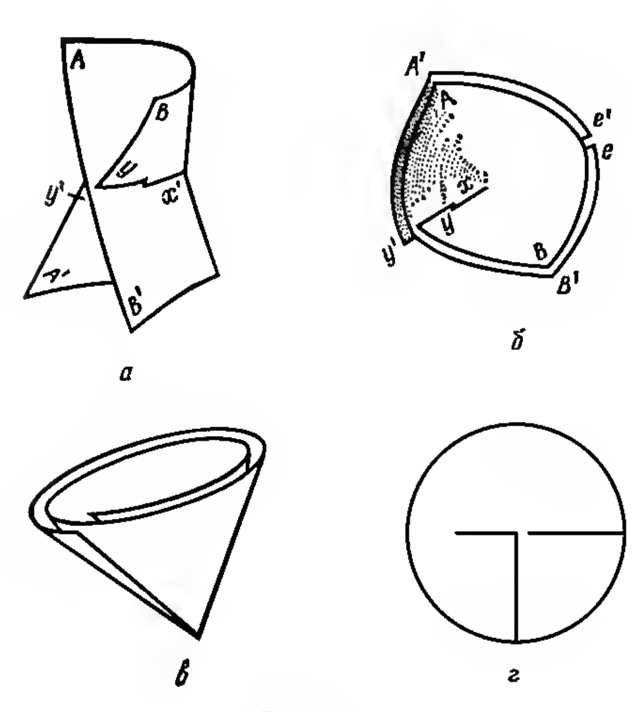


Рис. 114.

этой фигуры в стороны (освобождая участок самопересечения), мы обнаружим лишь 2 оборота. Здесь что-то не так.

Повторим эксперимент, только на этот раз будем соединять другую пару краев, AB' и BA', использовав узкий прямоугольник, у которого на сей раз боковая сторона много меньше основания (рис. 113). Склеив разрез ee' и разрезав фигуру вдоль aa', мы получим петлю *без* перекручиваний вообще, то есть цилиндр. Что же произошло? Пусть мы освободились от самопересечения, проведя через него разрез, но почему же исчезло перекручивание?

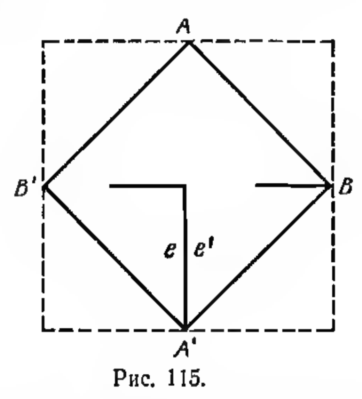


Рис. 115.

Давайте вернемся к квадратной модели Гарднера, изображенной на рис. 114. Когда мы просунем щель yy' в xx' (рис. 114, *а*), то не станем проводить складок на бумаге. Затем поднимем A' вверх за A, а B' — вверх перед B (не соединяя ee') и, посмотрев сверху (рис. 114, *б*), увидим двойной конус. На рис. 114, *в* мы отрезали уголки AA' и BB', получив при этом конус с гладким краем. Такая фигура гомеоморфна фигуре, изображенной на рис. 109, *г*. Развернув ее снова, получим круг (рис. 114, *г*). Это подсказывает нам изменение, которое можно сделать в исходной квадратной модели (на рис. 115 пунктирные линии показывают края исходного квадрата). Сложив ее, как и раньше, мы получим новое расположение краев, поскольку теперь уже не будет края, который был бы расположен наполовину спереди, а наполовину позади другого края. Когда мы про-

делаем тот же опыт, что и ранее, соединив только одну пару противоположных краев, то получим несколько отличный результат. Нам придется воспользоваться для этого квадратными моделями, поскольку удлиненные варианты не приведут ни к чему хорошему в случае новых, диагональных, разрезов. На сей раз в обоих случаях у нас получится петля с двумя оборотами и никаких цилиндров.

В случае квадратных моделей довольно трудно проследить за тем, что мы делаем, но, взяв в руки карандаш и водя им по модели, все же можно подсчитать число оборотов. Поскольку теперь мы не проводим раз-

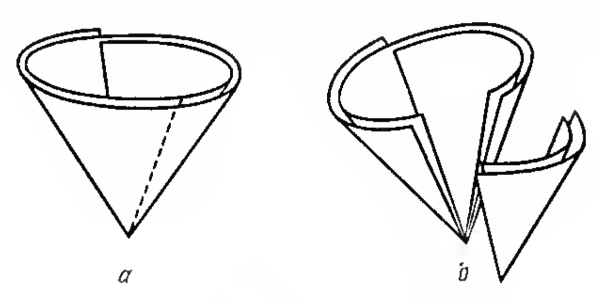


Рис. 116.

реза вдоль линии самопересечения, не удивительно, что у нас не получается цилиндра, как раньше; но почему же мы приходим к двум оборотам вместо четырех? Давайте снова поэкспериментируем.

В случае, представленном на рис. 114, *в*, мы уничтожили различия между парами склеенных краев, отрезав уголки и сделав тем самым края плавно переходящими один в другой. У идеальной проективной плоскости нет углов, как нет их и у кросс-кэпа (у кросс-кэпа, полученного выше развертыванием листа Мёбиуса, не было углов, хотя, если бы они и были, соответствующая поверхность все равно была бы кросс-кэпом). Идеальные варианты всех этих фигур (даже, как это ни странно, и листа Мёбиуса) полностью симметричны. Давайте возьмем конус с гладким краем, как на рис. 114, *в*, и сделаем его плоским, добавив еще бумаги. Мы разрежем оба слоя вдоль пунктирной линии (рис. 116, *а*), развернем конус и добавим V-образные клинья

(рис. 116, *б*). Если они будут достаточно широки, конус, оставаясь топологически неизменным, превратится в диск. Мы получим два слоя с самопересечением, идущим от центра к краю (рис. 117) [1]. Эту модель легче сделать, если мы начнем с двух дисков, разрежем ра-

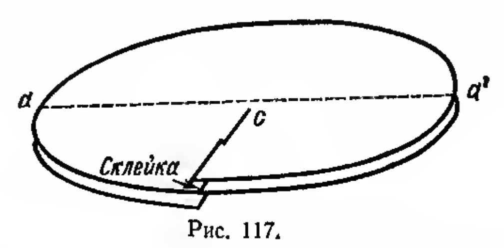


Рис. 117.

диально каждый из них, а затем склеим. Чтобы превратить такую модель в проективную плоскость, круглый край верхнего листа следует приклеить к такому же краю нижнего листа. Если теперь мы разрежем нашу

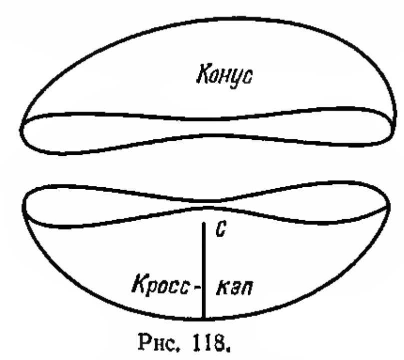


Рис. 118.

фигуру вдоль прямой aa', сразу же за центром C (конец самопересечения), то получим две части, показанные на рис. 118, с уже соединенными внешними краями (на рисунке они наклонены для большей наглядности). Нижняя половина представляет собой кросс-кэп, а

---

[1] Любопытно отметить, что именно с изучения такого рода самопересекающихся поверхностей (так называемые *римановы поверхности*, являющиеся естественными областями определения функций комплексного переменного) началась топологическая наука. О римановых поверхностях см. Спрингер Дж. Введение в теорию римановых поверхностей. — М.: ИЛ, 1960. — *Прим. ред.*

верхняя топологически эквивалентна диску. Но мы уже указывали, что если кросс-кэп вставить в дыру сферы, то получится проективная плоскость; а наш диск топологически эквивалентен сфере с дырой, именно поэтому наша фигура до проведения разреза aa' представляла собой проективную плоскость.

Разница состоит в том, что прежний кросс-кэп (рис. 107 и 108) был плоским, однослойным, и его самопересечение было сосредоточено в центре (мы в действительности не могли бы построить такую модель). Та модель была симметричной относительно точки; но тот

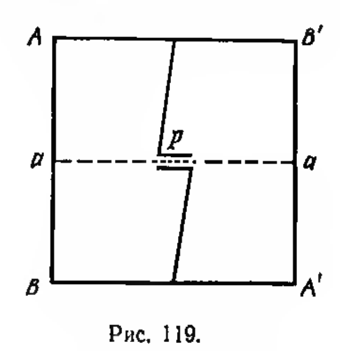
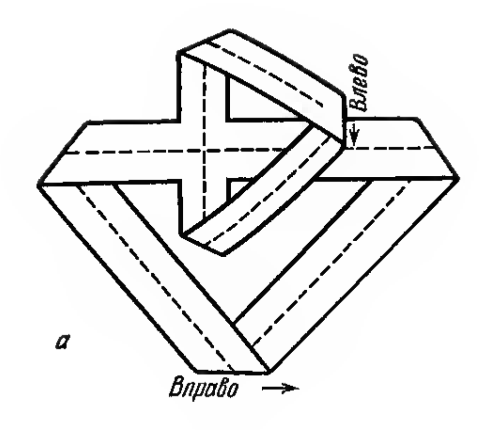
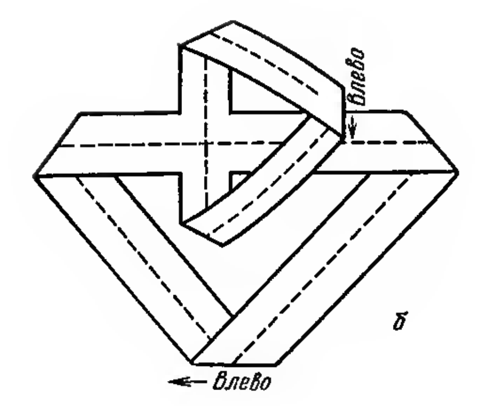


Рис. 119.

факт, что новая модель не обладает такой симметрией, не делает ее хуже модели бутылки Клейна — основная наша забота заключается в том, чтобы наилучшим образом устроить самопересечение. Как модели бутылки Клейна, так и наша новая модель симметричны относительно некоторой нарисованной на них линии или, если речь идет о трехмерном пространстве, относительно некоторой плоскости; однако лист Мёбиуса не обладает подобной симметрией. Давайте обратимся к моделям, где самопересечения не только представлены недостаточно аккуратно, но даже отсутствуют вообще.

На рис. 64 мы показали очень неполные модели бутылки Клейна и проективной плоскости, сделанные из бумажных крестов: неполные, поскольку в настоящих моделях *все* края обеих пар должны быть склеены. Аналогично мы можем склеить квадратный лист Мёбиуса, прорезав щели в сторонах квадрата (рис. 119). Его легко будет перекрутить относительно узенькой





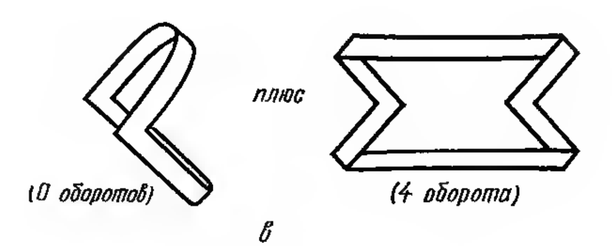


Рис. 120.

неразрезанной части P; однако разрезы сами образуют часть края полоски, поэтому она не будет ни правильной, ни квадратной. Сродни ли им разрез ee' в модели Гарднера? Едва ли, поскольку он в итоге склеивается вновь, а разрезы на рис. 119 остаются и после того, как AB соединяется с $A'B'$. Несмотря на этот эффект, полоска на рис. 119, после того как мы разрежем ее вдоль aa', даст петлю с четырьмя оборотами.

Теперь мы сделаем осевые разрезы в крестообразной модели, о которой говорили в гл. 4 (рис. 64), вновь представленной здесь, но в сплющенном виде, дабы легче было следить за перекручиваниями, которые на рис. 120 превратились в складки. Обе эти модели изображают проективную плоскость, только на рис. 120, *а* модель симметрична в том смысле, что одна пара концов склеена с перекручиванием влево, а другая — с перекручиванием вправо. На рис. 120, *б* обе пары концов перекручены в одну и ту же сторону: влево. После того как мы разрежем первую модель вдоль пунктирной линии, получатся две сцепленные друг с другом петли. Одна из них будет иметь два левовинтовых оборота, а другая — два правовинтовых. Обратите внимание: два, а не четыре.

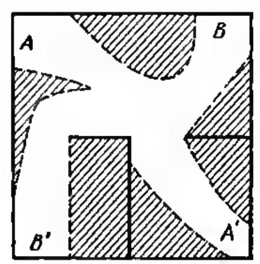


Рис. 121.

Когда мы произведем осевой разрез второй модели (рис. 120, *б*), получатся две несцепленные петли: одна с четырьмя оборотами, а другая — вовсе без них, то есть цилиндр (рис. 120, *в*). Эта серия экспериментов напоминает превращения с моделью Гарднера, связанные с ее симметрией. Если мы возьмем исходный квадрат модели Гарднера и удалим часть бумаги, так чтобы получился деформированный крест (рис. 121), то

станет ясно, что две пары краев соединяются по-разному: с перекручиванием вправо и влево. (Прежде чем вырезать крест из квадрата, рационально провести соответствующие складки.) Быть может, читатель захочет (прочитав эту главу) провести эксперимент, склеивая смежные, а не противоположные концы крестообразных моделей и по-разному их перекручивая и проводя разрезы. В некоторых случаях результаты окажутся весьма причудливыми. Мы предоставляем читателю самостоятельно разобраться в них.

Пока мы еще не объяснили, почему некоторые из этих моделей после разрезания дают два оборота, тогда

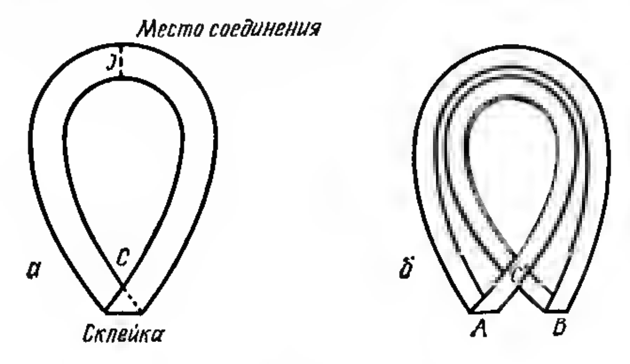


Рис. 122.

как лист Мёбиуса дает их четыре. Ведь перед разрезанием у них у всех одинаковое число оборотов: один. Давайте сделаем сплющенный лист Мёбиуса (рис. 122). У него есть одно самопересечение края в точке C, от которого нельзя избавиться ни с помощью деформации, ни даже с помощью разрезания с последующим склеиванием, допускаемым при гомеоморфизме. (Как уже говорилось, при гомеоморфном преобразовании разрешается временно проводить разрезы при условии, что в итоге мы вновь *поточечно* соединим то, что было соединено ранее.) Таким образом, правовинтовой лист Мёбиуса можно разрезать и склеить из него левовинтовой лист (число оборотов может быть и больше одного; необходимо лишь, чтобы оно было нечетным).

Разрезав вдоль оси фигуру, изображенную на рис. 122, *а* и слегка раздвинув ее (рис. 122, *б*), мы заме-

тим, что исходное перекручивание появляется в двух местах, A и B, наделяя новую петлю двумя оборотами; кроме того, возникает самопересечение этой петли в точке C', соответствующей пересечению C. Рассмотрим этот новый участок самопересечения C'. На рис. 123 он показан в увеличенном виде с краями x и y. Вытянем его в направлении, указанном стрелками, дабы обнаружить, что мы получили еще два оборота, которые вместе с первыми двумя составляют четыре оборота. Создается впечатление, что один исходный оборот, отвечающий листу Мёбиуса, не был совсем уж одинок: наряду с ним существовал еще один оборот, лишь замаскированный тем обстоятельством, что края самопересекались (когда мы по-новому связывали два края исходной неперекрученной и несклеенной полоски). По-видимому, этот скрытый оборот не зависит от физического акта перекручивания.

Если мы возьмем несколько бумажных полосок, перекрутим их различное число раз, а затем склеим и, разрезав вдоль оси, подсчитаем количество оборотов, то получим следующую таблицу.

Перед разрезанием	После разрезания
1	4
2	4
3	8
4	8
5	12
6	12
7	16
8	16
9	20
10	20 и т. д.

Обратите внимание: если число оборотов перед разрезанием нечетно и больше единицы, то у петли, образующейся в результате разрезания, проявляется узел тем более сложный, чем больше число оборотов. Значение этого факта объяснено ниже.

Во всех случаях, увеличивая нечетное число оборотов на единицу, мы не увеличим число оборотов после разрезания (последнее равно сумме оборотов в двух петлях, которые всегда образуются, когда мы разрезаем петлю с четным числом оборотов). Можно надеяться, что это итоговое число равно удвоенному числу оборотов

неразрезанной петли, когда последняя перекручена четное число раз, ибо при разрезании такой петли образуются две новые петли, идентичные исходной. Очевидно, добавление единицы к нечетному числу компенсируется тем обстоятельством, что мы меняем связность края, возвращаясь к тому, что было у неперекрученной исходной полоски. Поэтому, увеличивая нечетное число до ближайшего четного, мы не получаем дополнительных оборотов. Если же мы увеличиваем четное число до

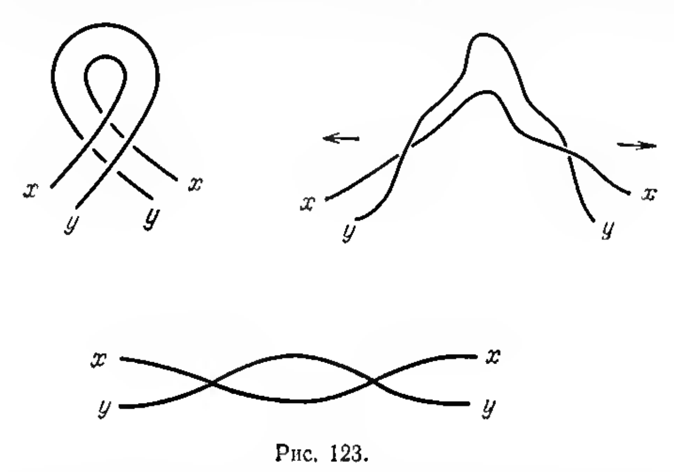


Рис. 123.

ближайшего нечетного, то при этом появляется четыре новых оборота, как это было в начале, когда мы разрезали петлю с одним оборотом; только теперь для того, чтобы перейти от одного нечетного числа к следующему нечетному числу, мы должны добавлять два оборота. Похоже на то, что в случае нечетных чисел увеличение числа оборотов получается за счет действительного добавления новых перекручиваний (удвоенных с помощью разрезания), но при неизменном добавлении лишних двух оборотов к исходной петле. Все это выглядит запутанным, но логичным. Нам осталось только объяснить, почему в случае модели Гарднера получалось два новых оборота вместо четырех.

Возвратимся к узлам. Подсчет оборотов в случае трех и большего нечетного числа оборотов затруднителен; облегчить его помогут следующие обстоятель-

ства. Простое перекручивание одной полоски *вокруг другой* не обязательно приводит к перекручиванию каждой из них самой по себе. На рис. 124 изображены две бумажные полоски, вырезанные в форме «змеек»: они переплетаются между собой, но *ни одна из них не перекручена сама по себе*. На рис. 125, *а* нечто в этом роде сделано с одной полоской. Чтобы построить эту плоскую модель, нам придется взять два склеенных куска бумаги. На первый взгляд кажется очевидным, что полоска не перекручена, но видимость обманчива. Полоску можно расплести, придав ей форму, показанную на

Рис. 124.

рис. 125, *б*, в которой мы тотчас узнаем аналог рис. 123: несмотря на волны, имеется самопересечение петли в C. Когда мы проделаем с ней ту же операцию расцепления, что проделана на рис. 123, то в итоге останутся два оборота.

Все узлы, образованные с помощью нечетного числа оборотов, имеют такую форму: независимо от того, сколько раз полоска *переплетается* сама с собой, она образует два и только два цикла. Таким образом, при подсчете мы можем закрепить один небольшой участок полоски канцелярской кнопкой и, двигаясь от одного конца полоски до другого (от кнопки и обратно к ней , следить за всеми изгибами полоски, внимательно подсчитывая, сколько раз *она перевертывается другой стороной кверху* (не обращая внимания на то, сколько раз она переплетается сама с собой, и добавив в конце число 2), то есть определяя число оборотов. В случае, представленном на рис. 122, *б*, число таких перекручиваний равно 2, поскольку соответствующая полоска, перед тем как мы, прорезав, разомкнем ее, тоже образует 2 цикла.

Давайте вновь изучим объект, представленный на рис. 111: у него одна сторона, один край и нет явных перекручиваний. После того как мы разрежем его по оси, образуется петля с двумя оборотами (левовинтовая,

если мы разверием его в одну сторону, и правовинтовая, если мы развернем его в другую стороиу). Теперь мы можем заметить, что это подлинно симметричный лист Мёбиуса, а образовавшнеся в итоге два обо-

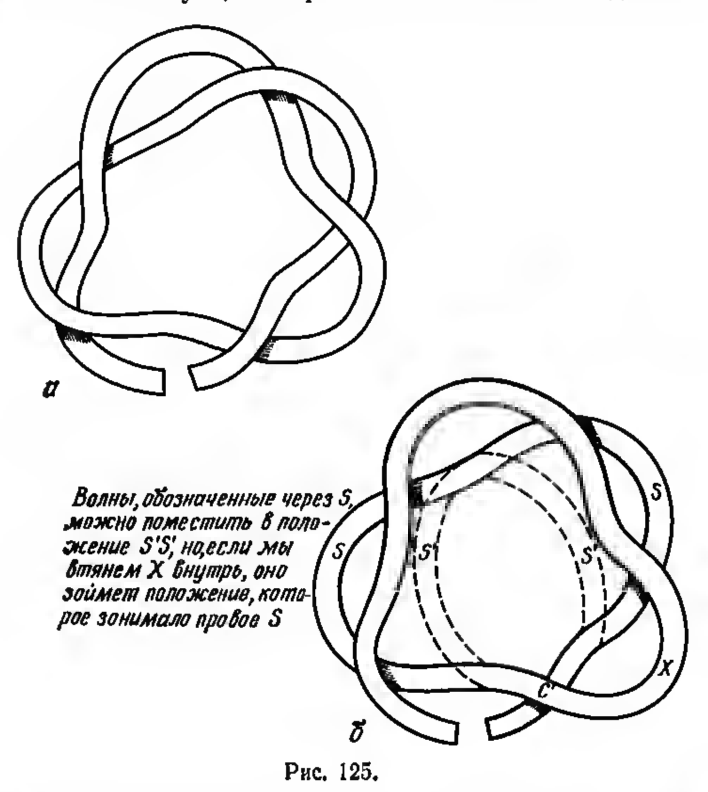


Рис. 125.

рота обязаиы своим появлеиием просто иовой связности края: мы ие делали ничего иного, что могло бы увеличить число оборотов. Наконец-то мы ничинаем кое-что понимать. На рис. 126, *а* представлен другой вариант той же фигуры, и может показаться, что здесь иет двух циклов, упомянутых ранее. Однако мы переведем одну из петель в положеиие, показаиное на рис. 126, *б*, и станет ясио, что при этом получился двойной цикл. Поскольку считается, что самопересечение идеальио, мы можем растяиуть фигуру в стороны, как указано стрел-

ками, *или* в противоположных направлениях, получив при этом право- или левовинтовые обороты.

Если мы возьмем «урезанную» модель, показанную на рис. 121, и разрежем ее вдоль оси после того, как

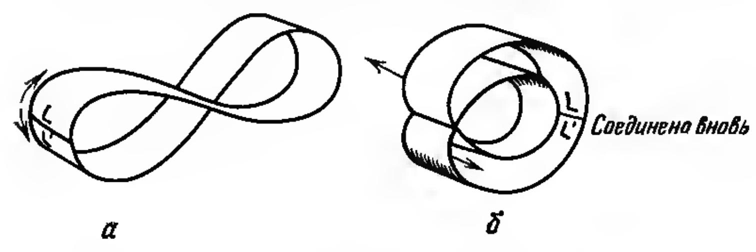


Рис. 126.

склеим только участки A и A', то обнаружим, что получился классический лист Мёбиуса, разрезанный вдоль оси; в результате у нас 2 стороны, 2 края и 4 оборота. Чтобы это легче подсчитать, можно отрезать несоединенные концы. Обороты будут правовинтовыми,

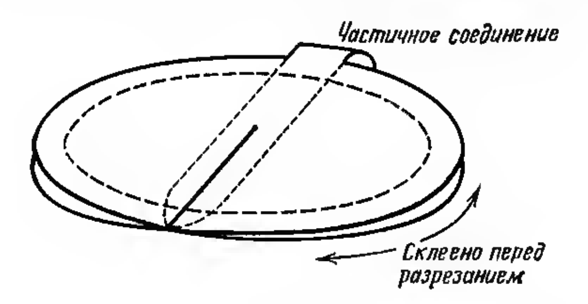


Рис. 127.

но если мы вместо этого соединим участки B и B', то обороты станут левовинтовыми.

Давайте вновь изучим круглую модель Гарднера (рис. 117). Проделав над ней небольшую операцию, мы обнаружим, что она весьма податлива (даже двулика). Разрезав модель вдоль пунктирных линий (рис. 127), мы получим фигуру, гомеоморфную симметричному листу Мёбиуса на рис. 111. Второй вариант мы получим, разрезав модель вдоль штриховых линий. В этом случае, равно как и в предыдущем, после разрезания

вдоль оси получатся петли с двумя оборотами. Как мы уже говорили, если разрезать модель Гарднера поперек сразу же за центром C, то получится диск (или конус) и кросс-кэп. Заметьте: слова «сразу же за» очень важны.

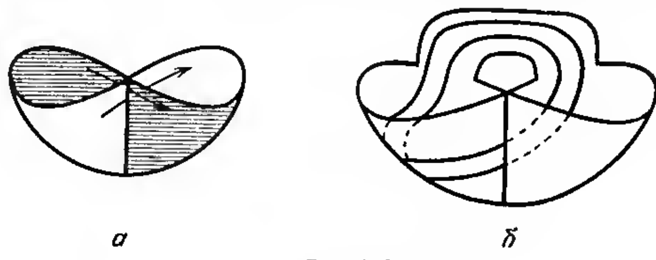


Рис. 128.

Кросс-кэп, который получается с помощью разреза, проходящего *через* C, конец участка самопересечения, выглядит подобно изображенному на рис. 128, *а*, именно

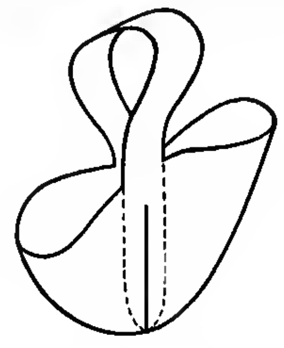


Рис. 129.

в таком виде эта поверхность изображается во многих книгах. Как можно заметить, у нее две стороны (заштрихованная и незаштрихованная; стрелки показывают, как они устроены вблизи линии самопересечения), что не верно. Из этой поверхности с помощью разрезания должен получаться лист Мёбиуса, но мы не сумеем этого сделать. Если мы чуть-чуть продолжим стороны вверх, то две стороны поверхности сразу же свяжутся между собой (рис. 128, *б*) даже при условии, что для этого продолжения мы выберем произвольную

форму, показанную здесь. Такое дополнение позволяет нам начертить левовинтовой лист Мёбиуса (внутренняя линия), при этом хорошо видно, как получить вместо него правовинтовой лист. У этого кросс-кэпа только одна сторона, и он удовлетворяет соответствующему определению, будучи проективной плоскостью с выколотой точкой (в нашем случае эта точка «раздута» до

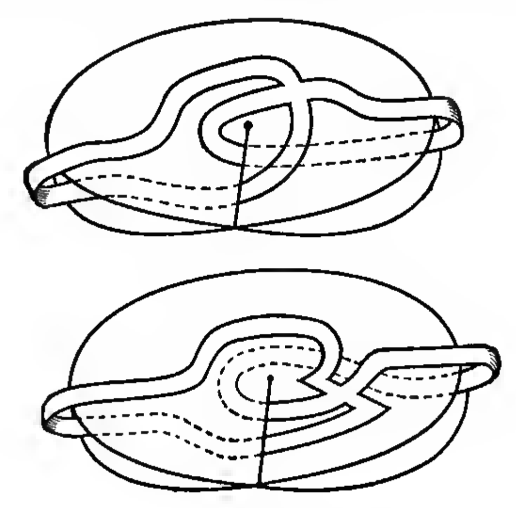


Рис. 130.

диска). Если мы видоизменим форму части, связывающей внутренность левой части с внешностью правой, а внешность левой с внутренностью правой, то нам удастся вырезать из нашей поверхности симметричный лист Мёбиуса (рис. 129).

Крестообразные модели проективной плоскости (как симметричную, так и с обоими концами, соединенными как право-, так и левовинтовым образом) удается вырезать из круглой модели Гарднера. На рис. 130 показаны первая и последняя из упомянутых крестообразных моделей. Чтобы получить желаемые результаты, остается только связать в нужных местах верхнюю и нижнюю части краев; очевидно, что эти модели можно вырезать также и из кросс-кэпа.

Не лишним будет подчеркнуть, что у модели Гарднера, как и у идеальной проективной плоскости,

асимметрия состоит *лишь в том*, что «одна пара краев соединяется с перекручиванием влево, а другая пара — с перекручиванием вправо»: построенная поверхность не имеет перекручиваний, несмотря на то что перекручивания использовались при построении модели. Это аналогично тому, как про беговую дорожку стадиона, по

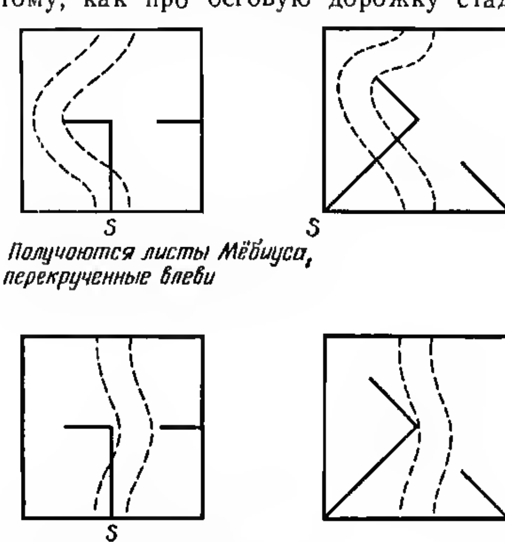


Рис. 131.

которой мы бежали в определенном направлении, можно сказать, что она «идет по часовой стрелке»; однако с равным основанием мы имеем право сказать, что «она идет против часовой стрелки», если изменим направление бега. Когда выше мы обсуждали рис. 121, то могло создаться впечатление, что при склеивании частей B и B' и последующем разрезании по оси левовинтовой оборот получался *потому*, что он имелся и в исходной, «неурезанной», модели. Но это не так: мы можем «урезать» ту же самую модель по-другому, и у тех же двух краев будет (или будет казаться, что есть) правовинтовой оборот, который приведет к правовинтовым оборотам после разрезания вдоль оси.

На рис. 131 представлены два способа «урезания» квадрата и диагональные варианты модели Гарднера, *все устроенные одинаково*. Это урезание показывает, как небольшая и на первый взгляд несущественная аномалия, возникающая при построении «низменной» бумажной модели (а некоторым математикам низменными кажутся вообще все модели), может привести к пониманию одной из фундаментальнейших концепций топологии (и даже всей математики) — симметрии. Теперь мы в состоянии понять, как математики представляют себе проективную плоскость ни право-, ни левовинтовой, а лист Мёбиуса — без перекручиваний. Быть может, открытая недавно левовинтовая ориентация некоторых элементарных частиц [1], как окажется впоследствии, не означает асимметрию Вселенной, а просто связана с тем фактом, что мы вышли на левостороннее сечение чего-то в более чем трехмерном пространстве Эйнштейна, являющегося совершенно симметричным. Будем же на это надеяться.

7

РАСКРАШИВАНИЕ КАРТ

Среди ранних и глубоких достижений топологии есть ряд теорем, которые первоначально были сформулированы как проблемы и лишь затем доказаны. Некоторые из них, вроде уже упоминавшейся теоремы о жордановой кривой, быть может, потому так знамениты, что их наглядная очевидность столь явно контрастирует с трудностью доказательства.

Другой теоремой такого рода является так называемая теорема о разбиении, утверждающая, что произвольную (двумерную) поверхность нельзя разбить (или разрезать) на области (или грани) так, чтобы в любой

---

[1] См. Гарднер М. Этот правый, левый мир. — М.: Мир, 1967. — *Прим. ред.*

точке соприкасались не более чем две из этих областей, *если только* ни одна из областей ни в каком направлнии не превосходит некоторого заданного размера. Например, нетрудно удовлетворить последнему условию, если разбить всю поверхность на клеточки наподобие шахматной доски: в самом деле, если заданный размер равен, скажем, 1 см, то достаточно, чтобы диагонали всех клеточек были меньше 1 см. Однако первое условие здесь нарушено, ибо в каждом уголке соприкасаются 4 клеточки. (Аналогично в кирпичной кладке есть точки, в которых соприкасаются 3 кирпича.)

Первому условию можно удовлетворить, покрыв поверхность изолированными пятнышками (как у коня «в яблоках»), но тогда «основной фон» (который, разумеется, будет одной из областей разбиения) окажется больше заданного размера, если, конечно, этот размер задан разумно. Может показаться, что еще один путь состоит в том, чтобы взять серию концентрических окружностей: тогда первое правило не будет нарушено, ибо в каждой точке будут соприкасаться не более чем две области. Но, к несчастью, окружности постепенно становятся слишком большими, а если этого и не происходит, то слишком большой оказывается область, внешняя по отношению ко всем окружностям. Вы никогда не сможете преуспеть в своих попытках. Все это интуитивно кажется очевидным, но доказательство вовсе не просто. Кстати, эта теорема обобщается на любое число измерений [1]. Существует и еще одна теорема, даже более знаменитая, чем вышеназванные, ибо прошло более ста лет, как она сформулирована, а доказательства ее до сих пор нет [2].

Она известна как проблема четырех красок (формально, пока не получено доказательство, ее нельзя на-

---

[1] *Кратностью* разбиения области на части называют наибольшее число частей, имеющих общую (граничную) точку. Если части достаточно малы, то кратность разбиения части плоскости, или поверхности, $\geqslant 3$, (одномерной) линии или ее дуги $\geqslant 2$, пространственного тела $\geqslant 4$ и т. д. На этом основывалось первое определение *размерности*, принадлежащее А. Лебегу (1911) и Л. Брауэру (1913). — *Прим. ред.*

[2] В 1976 г. эта теорема была доказана с использованием ЭВМ (см. Белага Э. Г. Мини-геометрии — М.: Знание, 1977; Яглом И. М. Четырех красок достаточно, Природа, 1977, № 4. — *Прим. ред.*

звать теоремой). В ней утверждается: чтобы «правильно» раскрасить любую карту, изображенную на односвязной поверхности вроде поверхности глобуса или этой страницы, необходимы только 4 краски.

Разумеется, на карте могут существовать точки, в которых сходится любое число областей (или стран), что еще вовсе не означает, что *каждую* из них необходимо закрасить *своей* краской. (Шахматную доску можно, как обычно, раскрасить только двумя красками, хотя на ней есть точки, где сходятся четыре клетки.) Чтобы две страны было необходимо закрасить в разные цвета, надо чтобы у них был хотя бы небольшой общий участок границы. Нам не требуется также все моря красить голубой краской или все британские владения — розовой; мы обязаны лишь красить в разные цвета прилегающие страны. Никому не удалось построить карты, для которой потребовалось бы более четырех красок, никому не удалось также доказать, что такой карты построить нельзя, хотя огромное количество ученых умов пытались это сделать. Было доказано, что 5 областей нельзя расположить таким образом, чтобы каждая из них касалась всех остальных (доказательство, если поводить его абсолютно строго, оказывается хитрее, чем можно было бы предположить), однако отсюда еще вовсе не следует справедливость общей теоремы о четырех красках, хотя существование подобных пяти областей, конечно, опровергало бы эту теорему.

Можно начать чертить карту и раскрашивать ее по мере построения, но не исключено, что мы зайдем в тупик и нам придется вернуться назад и раскрашивать карту по-новому. Во всех экспериментах нам удается выпутаться из любого положения, но до сих пор не доказано, что это действительно возможно *всегда*.

Самое досадное, что доказана теорема, которая кажется гораздо более трудной: на торе или на любой другой *двусвязной* поверхности существуют карты, для раскрашивания которых требуется 7 красок, и семи красок хватает для раскрашивания *любой* карты. В случае если читателю нравится озадачивать других, пусть он нанесет рис. 132 на бумажный тор (бублики малопригодны для картографии) и после небольшой предварительной болтовни его раскрасит. Как можно заметить, на рисунке семь областей, каждая из которых

касается всех остальных (помните о склейках, указанных стрелками).

Следует объяснить, что области на противоположных сторонах, которые соприкасаются между собой вдоль участка *склейки*, должны быть окрашены в разные цвета. Даже в случае листа Мёбиуса удалось доказать, что нужно не более чем 6 красок и что есть

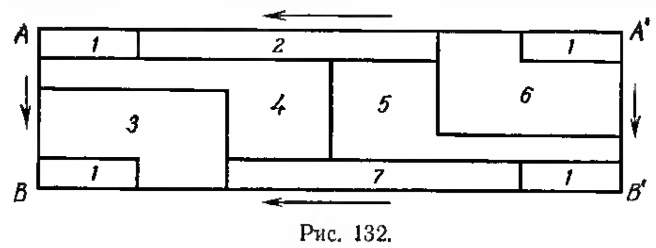


Рис. 132.

карты, для которых требуется ровно 6 красок. Если разбить полоску, как показано на рис. 133, а затем перекрутить ее и склеить, то мы увидим, что при этом получится 6 областей, каждая из которых будет касаться всех остальных. Поскольку у листа Мёбиуса одна сторона, мы считаем, что он прозрачен: каждый участок имеет один и тот же цвет, независимо от того, с какого *направления* мы на него смотрим (см. об *ориентируемости* в гл. 2).

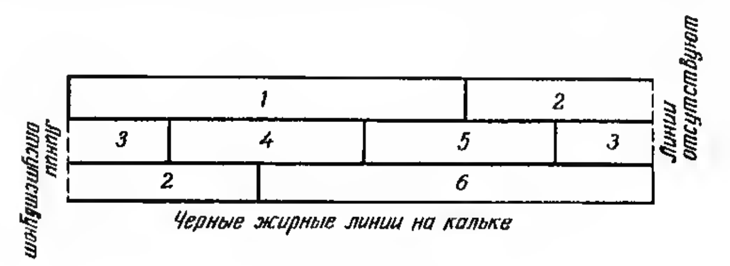


Рис. 133.

К проблеме четырех красок подступались с разных сторон, из которых, по-видимому, наиболее обещающей является формула Эйлера для многогранников, поскольку любую карту можно топологически преобразовать в некоторый многогранник, а формула, как мы видели ранее, приложима к любой фигуре, состоящей

из граней (стран на карте), ребер (границ) и вершин (точек соприкосновения границ). Несмотря на изнурительные исследования, основная проблема не решена до сих пор, хотя в качестве ее «отходов» получен ряд интересных теорем. В некотором смысле эту проблему можно было бы назвать проблемой трех красок, ибо если бы нам удалось построить карту, для внешнего «пояса» которой потребовалось бы более трех красок, то мы могли бы затем окружить ее еще одной областью, для чего нам понадобилась бы пятая краска.

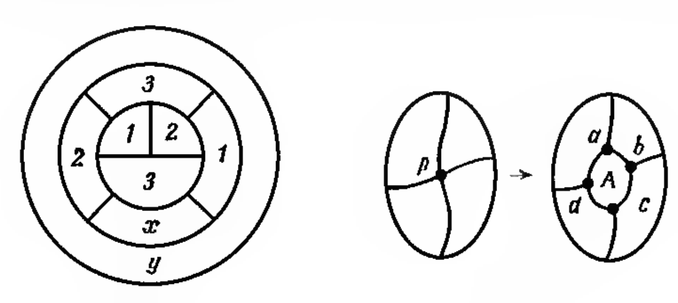


Рис. 134.

Рис. 135.

Это означает не то, что для всей такой карты, за исключением лишь окружающей карту области, используются только 3 краски, а то, что во всех случаях мы должны быть в состоянии так *перекрасить* карту, чтобы для областей внешнего «пояса» потребовалось только 3 краски. В случае карты, изображенной на рис. 134, мы начинаем раскрашивать сначала внутренние области: *1*, *2* и *3*, а затем, как показано, окружающие их области; при этом мы начинаем с тех же красок *1*, *2* и *3*, но уже для x потребуется четвертая краска, а для y — пятая. Дабы этого избежать, мы должны отказаться от четвертой краски для области x, закрасив этим цветом одну из внутренних областей, что позволит нам в случае «пояса» x обойтись тремя красками. Если мы найдем удачный метод удаления четвертых красок для *всех последовательно возникающих* «внешних поясов», то сможем решить эту часть проблемы.

Любой карте можно придать более единообразную форму, преобразовав ее в то, что называется *правиль-*

ной картой — такой, у которой в каждой точке соприкасается не более трех областей. Это не повлияет на раскрашивание, поскольку при переходе к первоначальной карте окажется лишь, что несоприкасающиеся области соприкасаются в точке (но не по части границы!). Обычный способ состоит в том, чтобы заменить точку p, в которой соприкасается более трех областей, новой областью A (рис. 135). Теперь у нас образовалось 4 точки a, b, c, d, в каждой из которых соприкасаются только 3 области (страны). Если мы правильно

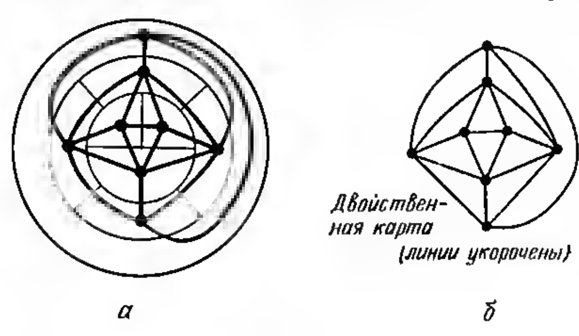


Рис. 136.

раскрасим эту вторую карту, а затем удалим A, то в результате останется все еще правильно раскрашенная карта, с той оговоркой, что мы, быть может, используем 3 краски там, где окажется достаточно и двух. Мы принесли простоту в жертву единообразию — вещь, порой полезная в математике.

Мы можем прийти к еще большему единообразию, если сначала преобразуем нашу карту в карту ей *двойственную*. Двойственная карта представляет собой связную сеть, или *граф*, где области представлены точками, а «пограничность» (или соприкосновение) областей изображается линией, соединяющей соответствующие точки. На рис. 136, *а* показано, как получается карта, двойственная к той, что изображена на рис. 134: каждая из областей заменяется точкой, и если области соприкасались, то соответствующие точки соединяются линией. Затем мы забываем про исходную карту, оставляя только двойственную карту (рис. 136, *б*). Поскольку исходная карта была правильной, все области

(«страны») новой карты представляют собой треугольники. Если бы исходная карта не была правильной, то мы могли бы добиться этого, не добавляя новых областей, как на рис. 135, с помощью триангуляции. Карта, изображенная на рис. 137, *а*, приводит к решетке, показанной на рис. 137, *б*; далее квадрат и пятиугольник разбиваются пунктирными линиями на треугольники, что, как уже объяснялось выше, не повредит решению.

Раскрашивание исходной карты переходит на двойственной карте в такую нумерацию («раскраску») точек

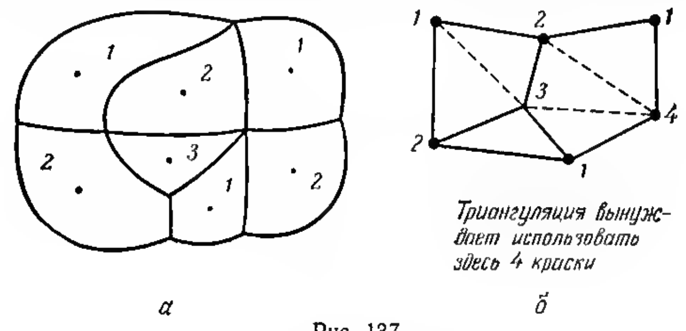


Рис. 137.

(вершин графа), при которой никакие две связанные между собой вершины не будут занумерованы одинаково. Выясняется, что мы не продвинулись в решении задачи, но зато мы имеем теперь дело исключительно с треугольниками. Можно произвести и дальнейшие упрощения. Очевидно, что на всякой карте любыми островами и анклавами[1] можно пренебречь, поскольку каждый из них соприкасается лишь с одной окружающей его областью и, следовательно, его можно покрасить (занумеровать) отличным от нее способом. Точно так же можно пренебречь и областью, окруженной двумя или тремя взаимно-касающимися областями (рис. 138), поскольку для таких областей нужны 2 или 3 краски, а для внутренней области — третья или четвертая краска. Это же относится и к *группе* областей, целиком окруженных не более чем тремя взаимно-касающимися областями (рис. 139). Такая группа

---

[1] Анклав — страна, окруженная со всех сторон территорией другой страны. — *Прим. перев.*

сама образует *отдельную* карту, поскольку ее «личные проблемы» не могут повлиять на то, что лежит вне окружающих ее трех областей: для них все равно требуются 3 различные краски, неважно какие, и если мы докажем теорему для любой карты, то она будет применима также и к изолированной группе. Это означает,

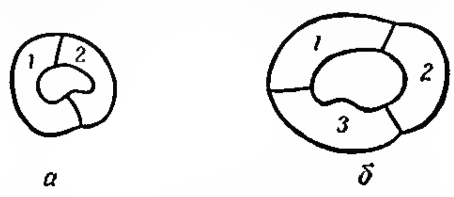


Рис. 138.

что ни у какого из наших графов не будет треугольных областей, содержащих внутри какую-либо другую точку или линию, за исключением *внешнего треуголь-*

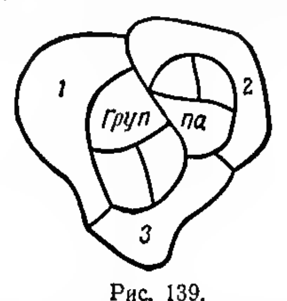


Рис. 139.

ника, если таковой имеется. Также в каждой точке будут сходиться не менее четырех линий (рис. 140, *а* и *б*), поскольку меньшее число может возникнуть только в случае одного (возможно, деформированного) треугольника (запрещенного в силу рис. 140, *б*). К сторонам любого треугольника T будут примыкать три других треугольника с *независимыми вершинами* a, b и c (рис. 140, *в*), поскольку, если бы у двух из них была общая вершина V, в результате получился бы рис. 140, *г* (граф, соответствующий рис. 140, *б*). Наконец, опущены все лишние связи, поскольку все равно связанные между собой точки нам придется нумеровать разными номерами (окрашивать в разные цвета).

Если карта нанесена на сферу, то мы можем развернуть ее на плоскость, как мы делали это с многогранникамн (гл. 1); причем область с «задней стороны» сферы перейдет во внешнюю область нашей новой карты. В случае графа (двойственной карты) это приведет к одной новой внешней точке p, связанной линиями с каждой из старых внешних точек, и к тому, что внешний миогоугольник всегда окажется треугольииком (рис. 141).

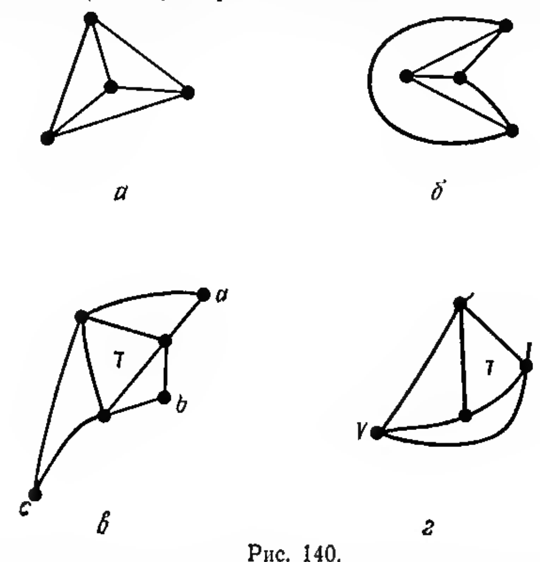


Рис. 140.

Рис. 141.

Теперь уже читатель должен полагаться иа самого себя: поскольку основы были изложены столь последовательно, мы не можем предложить ннкакого иного

стимула, кроме приглашения решить данную проблему. Быть может, свежий, более проницательный глаз заметит то, что проглядели специалисты.

Для того чтобы вы лучше почувствовали трудности, возникающие при раскрашивании карт, мы предлагаем следующую игру, которая вам поможет и, возможно вас позабавит. В нее играют двое. Игрок *А* рисует область. Игрок *В* раскрашивает (нумерует) ее и рисует новую область. Игрок *А* ее раскрашивает и добавляет

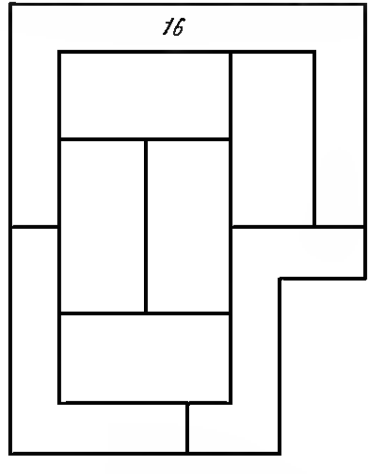


Рис. 142.

третью область, и т. д. до тех пор, пока кому-то не потребуется пятая краска. Здесь можно расставить ловушки для неосторожного, которые иногда удается предвидеть и избежать.

Головоломка. Вам требуется раскрасить карту (рис. 142). Площадь каждой области равна 8 $м^2$, за исключением верхней, у которой площадь составляет 16 $м^2$. У вас есть следующие краски: КРАСНАЯ, которой хватает ровно на 24 $м^2$; ЖЕЛТАЯ, которой хватает на 24 $м^2$; ЗЕЛЕНАЯ, которой хватает на 16 $м^2$, и СИНЯЯ, которой хватает на 8 $м^2$. Результат должен удовлетворять обычному требованию: соприкасающиеся области нельзя закрашивать в одинаковый цвет. Остерегайтесь единорогов. Ответ содержится в приложении IV.

8

ГРАФЫ[1]

Кенигсбергские мосты

В предыдущей главе мы превращали карту в граф, дабы нагляднее показать, как она устроена. Любопытно, что именно такой прием был одной из отправиых точек в развитии топологии. В городе Кенигсберге (ныне Калининграде) было некогда семь мостов. Они связывали между собой и с берегами два острова

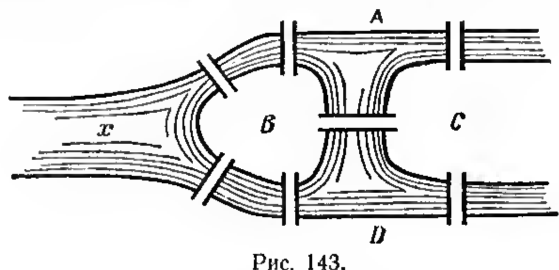


Рис. 143.

(рис. 143). В начале XVIII века появилась ставшая позже весьма известной головоломка, которая предлагала ответить на вопрос, можно ли пройтись по всем кенигсбергским мостам так, чтобы побывать на каждом из них один и только один раз.

Эта головоломка оказалась подобиой проблеме четырех красок, ибо никто не мог пройтись по мостам нужным образом, но и никто не мог доказать, что сделать это невозможно. Читатель может попытаться «пройтись» по мостам на чертеже, чтобы понять, как это трудно. В 1736 году Эйлер доказал, что головоломка неразрешима, сведя карту к графу (рис. 144), на котором участки суши изображались точками, а мосты — линиями. Исследуя многогранники, он обнаружил

[1] Подробнее см. Оре О. Графы и их применение. — М.: Мир, 1965. — *Прим. ред.*

общий закон, справедливый для всех таких графов. Можно заметить, что в отличие от графов из предыдущей главы, на рис. 144 имеются «лишние» ребра $A—B$ и $B—D$, но что поделаешь — ведь имено тзк проходят мосты.

Закон состоит в следующем. В каждой вершине графа сходится несколько линий (в нашем случае — мостов). Если число таких линий нечетно, то вершина называется *нечетной*, если четно, то она называется

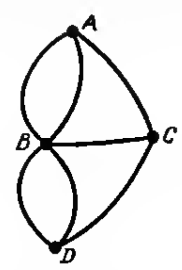


Рис. 144.

четной. Так вот, удалось доказать, что у графа может быть лишь *четное число нечетных вершин* (либо их вовсе нет). (Мы предлагаем читателю попробовать самому это доказать, используя в качестве ведущей нити доказательство теоремы Эйлера, о которой речь шла в гл. 1.) Обход, при котором каждая линия проходилась бы только один раз, можно совершить лишь в случае, когда либо нет *ни одной* нечетной вершины, либо когда таких вершин две. В случае задачи о кенигсбергских мостах граф содержал 4 нечетные вершины, так что обход был невозможен. Вам не стоит туда ехать, чтобы проверить это на месте, ибо на участке X (рис. 143) теперь построен новый мост, так что вершины A и B (рис. 144) стали теперь четными. Оказывается, что для того чтобы совершить нужный обход, мы должны выйти из нечетной вершины.

На основании этого закона можно заключить жульническое пари: попросите кого-нибудь нарисовать произвольный граф, а затем побейтесь с ним об заклад, можно ли совершить требуемый обход данного графа или нет. Разумеется, предварительно вы должны незаметно подсчитать число нечетных вершин и в зависи-

мости от этого делать свою ставку. Большинство из нас встречалось с простой разновидностью данной ситуации в детстве: граф *а*, изображенный на рис. 145, нельзя обойти нужным образом, а граф *б* — можно, но *при условии*, что вы начнете обход из *А* или *В*.

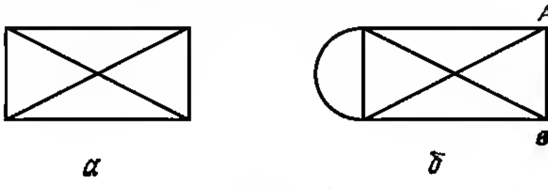


Рис. 145.

Общий закон гласит, что число не связанных между собой обходов, составляющих в совокупности общий обход, равно половине числа нечетных вершин (которое всегда должно быть четным).

Числа Бетти

Мы можем построить граф, не содержащий замкнутых участков, или петель: граф, состоящий из одного куска, и такой, что если мы удалим любое его ребро, то он распадется на две не связанные между собой части (одна из которых, быть может, сводится лишь к единственной вершине). Такой граф называется *деревом*, и нетрудно заметить, что у него число вершин всегда на 1 больше числа линий, или ребер. Причина этому та, что если мы применим к дереву формулу Эйлера, справедливую для любой фигуры, то, поскольку у него всего одна грань (внешняя часть плоскости), а $Г - Р + В = 2$, мы получим $1 - Р + В = 2$, или $В = Р + 1$.

Мы можем превратить в дерево любой граф (оставляя его связанным), удалив некоторые из ребер (рис. 146). Допустим, мы удалим *б* ребер (в нашем случае $б = 2$), дабы избавиться от замкнутых участков. Вначале было *Р* ребер и *В* вершин, а мы только что видели, что у дерева $В = Р + 1$; значит, теперь $В = 1 + Р - б$, или $б = 1 + Р - В$ (в нашем случае: $1 + 8 - 7 = 2$). Число *б* называется *числом Бетти* данного графа, оно всегда равно числу граней минус 1.

(Свое название число получило по имени итальянского «математического физика» XIX века Энрико Бетти [1].)

То же самое будет, очевидно, верно и для многогранников, например для тетраэдра (рис. 147): 6 ребер, 4 вершины и 4 грани. Мы можем удалить 3 ребра, не изолируя какую-либо вершину и не разделяя фигуру на изолированные части: следовательно, *б* = 3, что на 1 меньше *Г*. Число, равное просто Г — 1, может пока-
4
заться чем-то довольно тривиальным, но оно лежит в основе понятия связности и *применимо также и к поверхностям*, хотя и в несколько отличной форме. Диск

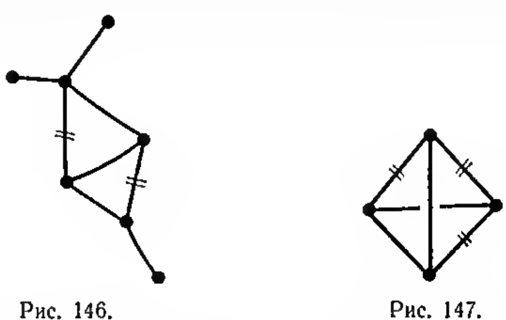


Рис. 146. Рис. 147.

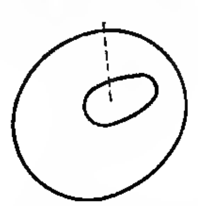
(или любую другую фигуру, топологически эквивалентную квадрату без дыр) нельзя разрезать поперек, не разбив его при этом на две части. («Поперек» означает, что разрез начинается на каком-то крае и заканчивается также на некотором крае). Следовательно, у (топологического) диска число Бетти равно нулю. С другой стороны, у кольца или у листа Мёбиуса число Бетти равно 1: в каждом из этих случаев мы можем провести разрезы, обозначенные пунктиром на рис. 148, не разбивая соответствующие поверхности на две изолированные части. У диска с двумя дырами число Бетти равнялось бы 2. А как обстоит дело со сферой? Поскольку у сферы нет края, мы не можем разрезать ее поперек, а если мы проделаем в ней дыру, дабы появился край, то получим топологический

---

[1] Термин «число Бетти» принадлежит французскому математику Анри Пуанкаре, который в гораздо большей степени, чем Э. Бетти, является автором соответствующего понятия. — *Прим. ред.*

диск (нужно растянуть дыру и сделать фигуру плоской).

Однако в случае тора или бутылки Клейна получается нечто новое: тор с дырой нельзя деформировать ни в диск, ни даже в цилиндр (это замечание справед-



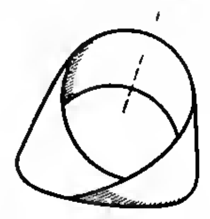


Рис. 148.

ливо и по отношению к бутылке Клейна). Разумеется, под дырой мы понимаем просто прокол, а не удаление маленького кружочка, как это происходит, например, при компостировании железнодорожных билетов. (Деформации проколотого тора мы изучим в следующей главе).

Совершенно очевидно, что в случае проколотого тора имеются два типа поперечных разрезов, которые не разбивают тор на изолированные части: один, x, охва-

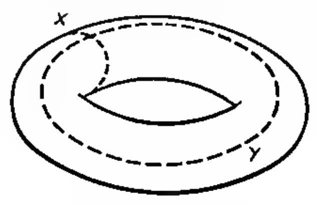


Рис. 149.

тывает тор поперек трубки (рис. 149), а другой, y,— вдоль нее. Если мы проведем разрезы x и y, то получится всего одна часть, а вернувшись к гл. 5, мы можем заметить, что аналогичным образом обстоит дело и в случае бутылки Клейна. У обеих этих поверхностей число Бетти равно 2.

Дабы найти число Бетти, не проделывая дыр, мы проведем петлеобразный разрез, название которого точно отражает суть дела: он начинается в произвольной точке поверхности и заканчивается в ней же без само-

пересечений (жорданова кривая). Здесь формула слегка меняется: петлеобразный разрез разбивает диск на две части, но то же происходит и в случае кольца или цилиндра. Поэтому подсчитаем число краев и скажем, что *б* равно числу петлеобразных разрезов, которые мы можем провести на поверхности, *не разбивая ее при этом на изолированные части, число которых превышало бы количество краев*[1]. Так, у диска 1 край, и мы не можем провести разрез, чтобы при этом не получилось более одной части; значит, $б = 0$. У кольца 2 края, и мы можем провести один петлеобразный разрез, не получив при этом более *двух* частей; следовательно, $б = 1$.

Однако у листа Мёбиуса 1 край, и мы можем продольно разрезать лист так, чтобы при этом он не распался на 2 части; поэтому здесь тоже $б = 1$. На непроколотом торе мы можем провести два разреза (параллельных тем, которые мы провели ранее), так что $б = 2$. То же самое будет и в случае бутылки Клейна, но, как оказывается, не в случае проективной плоскости. За проективной плоскостью очень трудно следить, однако удается показать, что если разрезать модель Гарднера (рис. 104) вдоль обеих осей, то она распадается на две части — конус и кросс-кэп. Гораздо легче воспользоваться заведомо неполной моделью (рис. 64, *б*), но лучше начать с подобной модели бутылки Клейна (рис. 64, *а*). Крайне удивительно, что когда мы разрежем ее вдоль пунктирных линий (обе модели изображены здесь на рис. 150), она превращается в плоский полый квадрат. Напротив, проективная плоскость распадается на части. Здесь роль играют не формы полученных частей, а их число: 1 в случае бутылки Клейна и 2 в случае проективной плоскости; так что число Бетти проективной плоскости, как и у листа Мёбиуса, равно 1. Это кажется довольно странным.

Все сказанное не означает, что мы безнаказанно можем проводить *любой* петлеобразный разрез на поверхности с $б = 2$: можно сделать сбоку такой маленький разрез, что он вырежет из поверхности круглый

---

[1] При этом разрезы, которые можно получить друг из друга непрерывной деформацией на данной поверхности, между собой не различаются. — *Прим. перев.*

кусочек. Точно так же некоторые поперечные разрезы, разбивают лист Мёбиуса на две части: например, можно провести С-образный разрез, дважды пересекающий внешний край. Однако важно то, что существуют разрезы, которые не разбивают лист Мёбиуса на части. Другой важный факт состоит в том, что если мы отметим допустимые (неразбивающие) петлеобразные и поперечные разрезы (проколов в последнем случае поверхность), то обнаружим, что каждая петля пересечет-

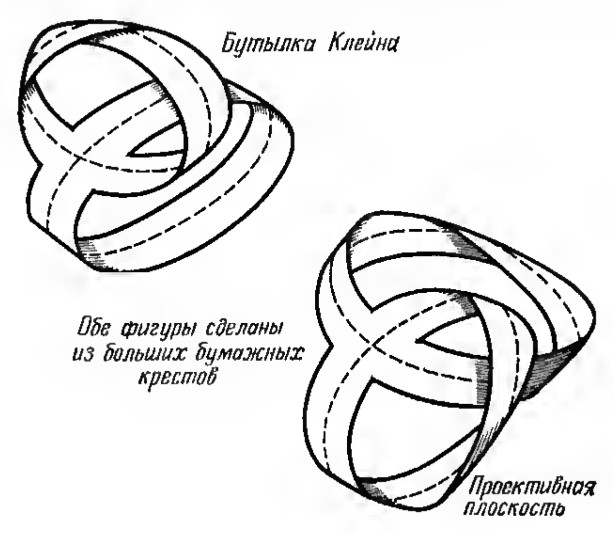


Рис. 150.

ся с поперечным разрезом. С. Лефшец из Принстонского университета доказал (1927 год), что эта так называемая «двойственность» обязательно имеет место в случае любой размерности. Теперь мы можем сказать, что (1) число краев, (2) число сторон и (3) число Бетти — это инварианты двумерных поверхностей. Для кошки число Бетти равно 9.

Позднее мы поговорим о последовательностях, и коль скоро речь зашла о разрезах, то настоящий момент кажется подходящим для того, чтобы поставить следующую задачу. Если мы разрежем листок бумаги пополам, сложим половинки вместе, снова все разрежем пополам и т. д., то очевидно, что сначала мы получим 2,

потом 4, потом 8, ... частей; каждый раз число частей удваивается. (Кстати, заметим, хотя это и не имеет никакого отношения к топологии, что если мы проделаем такую процедуру с игральной картой всего 52 раза, то у нас получится стопка, высотой намного превышающая расстояние от Земли до Солнца.) Числа 2, 4, 8, 16 и т. д., возникающие в нашем случае, образуют геометрическую прогрессию.

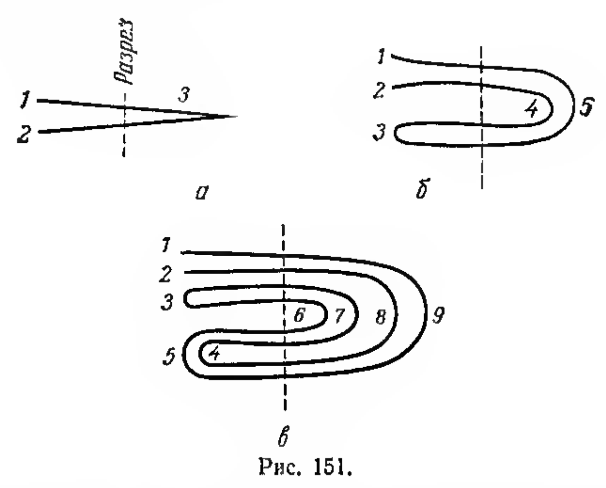


Рис. 151.

Все это прекрасно, но что произойдет, если мы начнем складывать лист бумаги и, скажем, после шести складываний разрежем его? Мы можем складывать лист двумя различными способами: проводя каждый раз складку под прямым углом к предыдущей или параллельно ей. Точно так же мы можем провести разрез перпендикулярно последней складке или параллельно ей. В случае параллельных складок и перпендикулярного разреза ответ прост и неинтересен: всегда получатся 2 части; но в случае параллельного разреза все становится запутанным. При первом складывании мы получаем ситуацию, изображенную на рис. 151, *а* (в поперечном сечении). На втором этапе получается случай *б*, на третьем — случай *в* и т. д. Подсчитав каждый раз число частей, мы увидим, что получится последовательность: 1 (нет разрезов, на рисунке не показано), 3, 5, 9... Изощренный ум может заметить

странное подобие этой последовательности той, что получалась ранее с помощью одних разрезов — разница состоит лишь в том, что к каждому члену старой последовательности добавлена 1: $0+1$, $2+1$, $4+1$, $8+1$, ...

Теперь уже, кажется, проще работать с бумагой и ножницами, чем с рисунками. Так или иначе, следующим числом будет 17. Внимательно изучив рис. 151, мы можем заметить, что все похоже на случай, когда число частей с каждым шагом удваивается, за исключением двух свободных, или несоединенных, краев: если бы мы их соединили, то получили бы в соответствующем месте 1 часть вместо 2. Именно поэтому к каждому члену старой последовательности прибавляется 1. В случае взаимно перпендикулярных складок и заключительного разреза любого типа последовательность возрастает со вдвое меньшей скоростью: 2, 3, 3, 5, 5, 9. 9, ... , если разрез перпендикулярен, и сразу начиная с 3, 3, если он параллелен. Эксперимент с бумагой покажет, почему так происходит, но мы не сможем экспериментировать достаточно долго: довольно быстро стопка становится слишком толстой, чтобы ее можно было разрезать. (Снова, кстати говоря, вы можете спокойно выиграть пари, предложив кому-нибудь сложить произвольный лист бумаги десять раз: сначала пополам, затем снова пополам и т. д. Это совершенно невозможно сделать: промышленность не выпускает столь больших и — или — тонких листов бумаги). Теперь мы подходим к самой сути.

Мы каждый раз складываем и разрезаем бумагу, *но все время проводим разрез не до конца*, вплоть до самого последнего разреза, который делается полностью. Сколько частей получится при каждом числе частичных разрезов? Какая при этом образуется последовательность? Из-за нарастающей толщины мы можем оказаться не в состоянии произвести эксперименты с настоящей бумагой, если число складок превысит 6 или 7; но, внимательно изучая то, что происходит, мы придем к рис. 152. Через x обозначен последний разрез, другие разрезы перенумерованы: все удваивается, чередуясь. Мы ограничимся случаем, когда складки проводятся каждый раз под прямыми углами, ибо в противном случае все становится неудобоваримым (да и наш

способ достаточно плох). Существуют четыре иаправлення, по которым можно разрезать бумагу: север, юг, восток и запад (запад и восток иа самом деле приводят к одному и тому же результату). Оказывается, что выбор иаравлеиия мало влияет иа ответ. (Проводя разрез, ие подходите слишком блнзко к краю.)

Складки, разумеется, проводятся по маленькнм неразрезанным частям. Здесь, чтобы ие чувствовать себя обмаищиком, следует намекиуть на результат: иногда

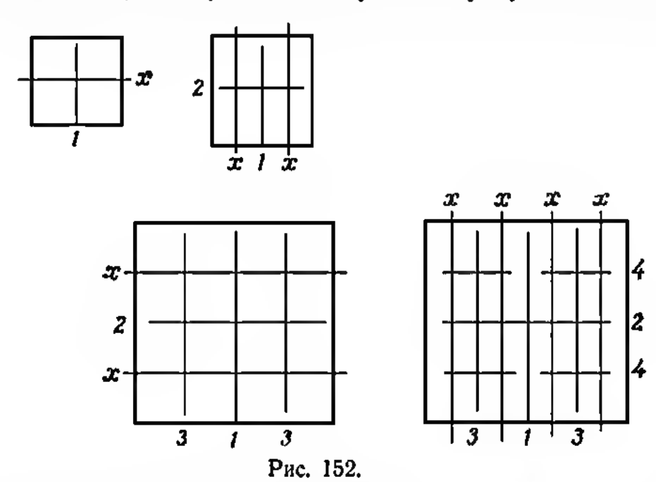


Рис. 152.

оказывается, что перемешиваются две нли более последовательиости нли же последовательностн чередуются — одиа получается в случае четиого, а другая — в случае иечетиого числа операций. Ответ даи в приложении V.

Узлы

Топологн давно заиимаются узламн, ио до снх пор в этой областн доказано ие слншком много утверждеиий, кроме разве того, что в более чем трехмериых пространствах узлов ие существует. Это связаио с тем обстоятельством, что жордаиова кривая разбивает иа частн только поверхиость, а ие трехмерное простраиство. Буква *О* делит эту страницу на две части: виутреннюю н виешнюю; одиако проволочная петля, подвешениая в середиие комнаты, ничего не разделяет. Быть

может, обсуждая узлы, более уместно сказать, что если две петли зацеплены в трехмерном пространстве, то в четырехмерном они будут расцеплены.

Тем не менее старая проблема в математике обычно заслуживает того, чтобы ее исследовать: в математике не бывает совпадений — кроме разве некоторых неудачных приближений, вроде приближения 3 для числа π. (Эта близость вводила в заблуждение многих: Библия прямо утверждает, что π равно 3, и до сих пор встречаются «чудаки», которые в это верят. Однако эксцентричность «чудака» не забавляет, а раздражает

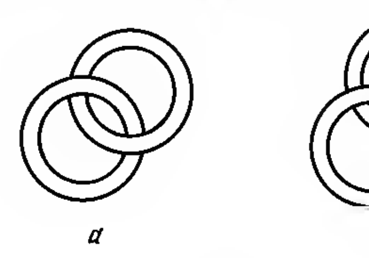


Рис. 153.

окружающих.) Трудности с классификацией узлов еще не преодолены. Нельзя сказать, что две петли сцеплены друг с другом просто на том основании, что их нельзя разъединить. Конечно, два кольца на рис. 153, *а* сцеплены и их нельзя разъединить; но как быть в случае трех колец, изображенных на рис. 153, б? Ни одно из них не сцеплено с другими, и все же их нельзя разъединить.

Некоторые топологи полагают, что все узлы по существу одинаковы — это просто петли или круги; но было бы трудно убедить моряка, что у запутанной веревки узел образовался простым соединением ее концов или что «бантик» и морской узел — это одно и то же. Наиболее существенное свойство узлов состоит в том, что они держат веревку, но это связано с трением и лежит в стороне от предмета нашего разговора. Случается, что узлы возникают как побочный продукт при занятиях поверхностями. Край листа Мёбиуса представляет собой с точки зрения трехмерного пространства перекрученную петлю, которую топологически

можно деформировать в окружность, как это мы делали на рис. 106—108. Однако, если, прежде чем склеить полоску, мы перекрутим ее не на 1, а на 3 пол-оборота, то край примет форму трилистника (рис. 154). Если его разрезать, а концы разъединить, то получится простейший из всех узлов. На этом основан старый фокус. Вы заготавливаете 4 широкие бумажные полоски: одну неперекрученную, одну, перекрученную на пол-оборота, одну, перекрученную на 2 пол-оборота, и одну, перекрученную на 3 пол-оборота. Если разрезать эти полоски вдоль по центру, то в первом случае получатся 2 несцепленные полоски; во втором — 1 длинная полоска; в третьем — 2 сцепленные полоски и в последнем — 1 полоска с узлом на ней в форме трилистника.

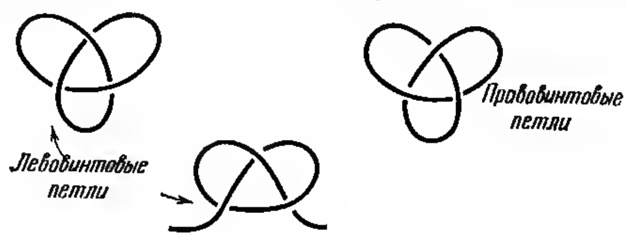


Рис. 154.

Трилистники бывают правовинтовыми и левовинтовыми; но, хотя разница между ними и очевидна, невозможно определить, какой именно узел правый, а какой левый, не обращаясь к какому-то реальному эталону[1].

Весьма поучительно посмотреть, как определяют «правое» и «левое» энциклопедические словари. American College Dictionary говорит, например, что если стоять лицом к северу, то направление налево — это направление на запад; направление же направо — направление на восток и т. д. Funk and Wagnall's более поэтичен: налево — это значит «по направлению к северу, когда мы смотрим на восходящее солнце». Можно было бы надеяться, что, описывая направление направо, авторы изменят позицию так, чтобы это направление совпадало с направлением на закат; но увы: это

[1] Можно представить себе, что в природе есть такой универсальный эталон (в атомной физике), однако его невозможно определить топологически.

просто направленне не на север, как раньше, а на юг. Webster's New Collegiate заннмает антропоцентрическую познцию: левая сторона у человека слабее правой, тогда как правая сторона — более развита. Encyclopaedia Britannica дает более изощренное определение: она напнрает на разлнчне между правым н левым в полнтнке. Точно так же обстоит с определением ширины и толщнны — все завнснт от того, как вы держите голову. Это — относнтельные понятня. Можно затеять долгую, бесполезную н довольно забавную днскуссню, спросив кого-лнбо (предпочтнтельно какого-ннбудь догматнка), почему отраженне в зеркале меняет местамн правую и левую стороны, а не верх с ннзом. Еслн вам попадется человек, знакомый с этнм вопросом, он может ответнть, что отражение меняет местамн не левую н правую стороны, а направленне спередн назад (это верно). Тогда спросите его, почему отражение превращает человека, держащего карандаш в правой руке, в такого же человека, но с карандашом в левой руке, прнчем карандаш *по-прежнему направлен острием вверх.* Ваш оппонент, вероятно, станет в тупнк.

9

СЛУШАЕТСЯ ДЕЛО О ПРОКОЛОТОМ ТОРЕ

Судья. Начннается слушанне дела. Пожалуйста, нзложнте свон доводы, мнстер Джонс. Перед вамн доска на случай, еслн вы пожелаете сделать какне-лнбо рнсункн.

Джонс. Мой достопочтенный оппонент, доктор Ситус, утверждает, что он вывернул наизнанку автомобнльную камеру.

Снтус (*перебивая*). После того как проделал сбоку маленькую дырку.

Джонс. Верно. Он хвастает этнм, как чем-то уднвительным, но я н в самом деле был бы уднвлен, если бы он оказался прав. Я счнтаю, что камера вывернута

наизнанку лишь наполовину; взгляните сами (*чертит на доске рис. 155*).

Судья. Доктор Ситус, не изложите ли вы нам свои доводы?

Ситус. Мой оппонент, очевидно, введен в заблуждение тем несущественным обстоятельством, что камера имеет теперь вид, указанный на рисунке, где она напоминает оторванную от чашки полую ручку. Очевидно,

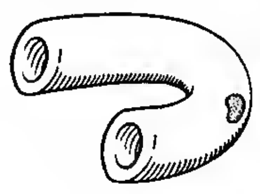


Рис. 155.

глядя на рисунок, он не узнал в ней тор. Конечно, камера деформирована и согнута, но топологически она представляет собой тор, хотя и проколотый, каким он и был до инверсии.

Судья. Инверсии?

Ситус. До выворачивания наизнанку — но термин «инверсия» звучит более красиво (и более научно). Если внимательно изучить представленную на рисунке

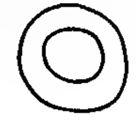


Рис. 156.

фигуру, то можно заметить, что она представляет собой просто тор с длинной, узкой и изогнутой дырой, проходящей по центру — то, что мы назвали бы дыркой от бублика. У камеры, представленной на рис. 156, внутреннее пространство, где обычно находится сжатый воздух, сплющено и вытянуто. Я могу показать на доске, как из данной формы можно получить более обычную, не разрывая и не склеивая камеру. (*Подходит к доске и чертит рис. 156.*) Как вы видите, нужно было только немного укоротить ее.

Джонс. И прн этом внутренняя, невывернутая, часть своднтся к тоикому колечку!

Снтус (*пренебрегая этим выпадом*). Мие бы хотелось также обратить вннманне иа то обстоятельство,

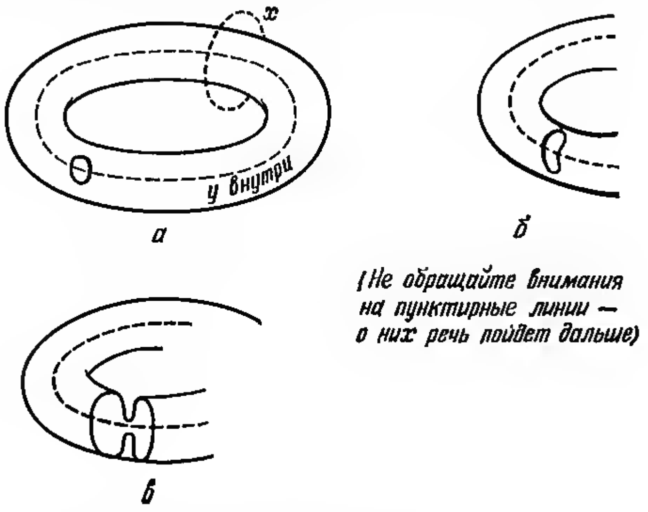


Рис. 157.

что камера, с которой я начал, была серой: теперь же она черная! Это произошло потому, что внутрення поверхиость была черной, а теперь черна вся внешняя часть.

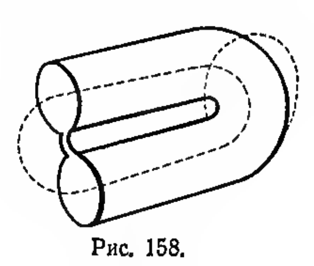


Рис. 158.

Судья. Не могли бы вы показать нам, как это делается?

Снтус (*удрученно*). О... пожалуйста, если вы настаиваете. (*Пожав плечами, он некоторое время борется с рис. 155, напоминая собой статую Лаокоона; на-*

конец камера принимает свой первоначальный вид [*рис. 157, а*] — *она вся серая.*) Ну вот! Я теперь все поясню серией рисунков (*Идет к доске.*) На рис. 157, *б*

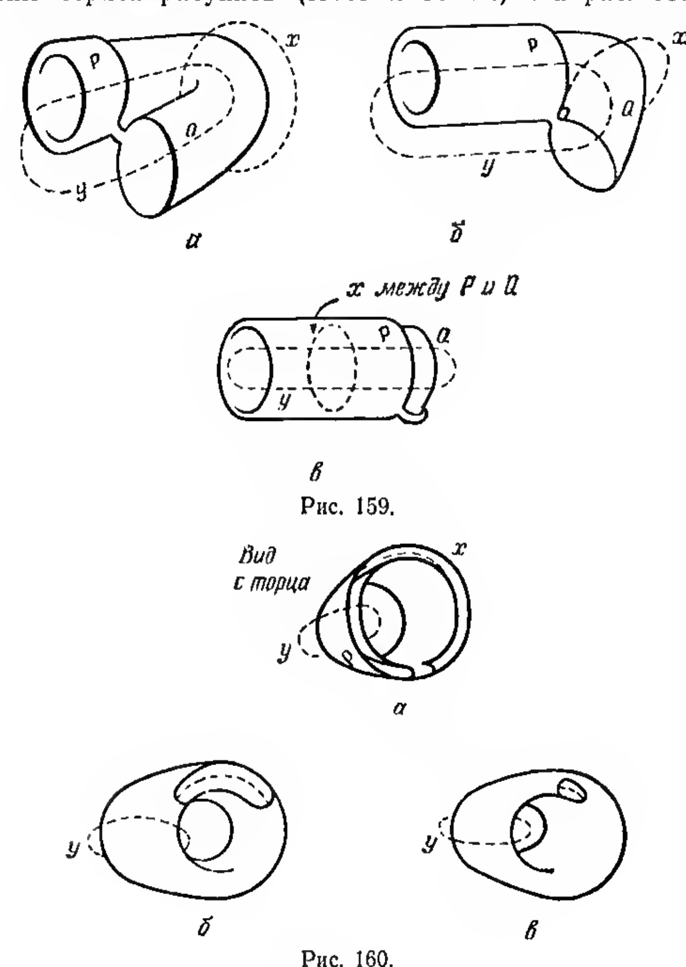


Рис. 159.

Рис. 160.

и *в* мы расширяем дыру до тех пор, пока не останется узенький перешеек (рис. 158). Затем мы начинаем заворачивать часть тора назад (рис. 159, *а*), подобно тому как это делают с голенищем носка, обозначая новую появляющуюся часть внутренней стороны поверхности

через P, а внешнюю сторону поверхности через Q. Далее мы продолжаем эту операцию (рис. 159, *б* и *в*) до тех пор, пока P не окажется рядом с Q, уменьшая дыру до ее первоначальных размеров. На рис. 160, *а* изображен вид с торца, и можно заметить, что очертания дыры приняли теперь форму дважды изогнутой жордановой кривой, которую мы вновь начинаем стягивать (рис. 160, *б* и *в*). На рис. 161 мы придали тору его первоначальную форму бублика. Можно заметить, что P, первоначально расположенное на внутренней стороне поверхности, теперь расположено снаружи, тогда как прямо противоположное произошло с Q. Тор вывернут наизнанку.

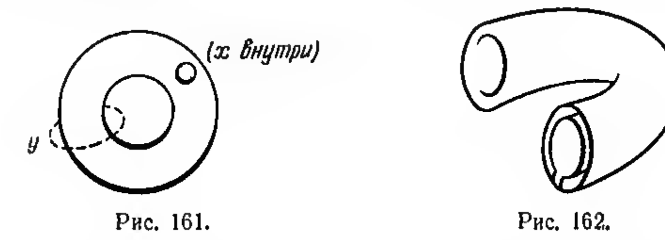


Рис. 161. Рис. 162.

Д ж о н с. Я понимаю эти рассуждения вплоть до рис. 159, *в*; но здесь и следует остановиться, ибо только до этого места вы сможете манипулировать с настоящей камерой. Позвольте мне переделать рис. 159, *в*, дабы он более соответствовал реальности (или вашему представлению о ней). Он будет выглядеть вот так (*чертит рис. 162*), и внутренняя половина точно такая же, как и вначале: вы просто *назвали* ее вывернутой. Все точки на ней, которые раньше смотрели друг на друга, смотрят друг на друга и теперь, а те, которые смотрели в противоположные стороны...

С и т у с (*перебивая*). Да, но раньше упомянутые вами точки смотрели *внутрь*, а теперь они смотрят *наружу*.

Д ж о н с (*идет к доске*). Мне кажется, я могу это пояснить. Вот перед нами перчатка (рис. 163, *а*); допустим, она черная внутри и серая снаружи. Теперь мы начнем выворачивать ее наизнанку. Сначала будем завертывать запястье до тех пор, пока это можно делать (рис. 163, *б*). Мы замечаем, что пальцы остаются на

месте (рис. 164, *а*). Теперь вытолкнем их наружу (рис. 164, *б*) все, за исключением *среднего пальца.* Обратите внимание, джентльмены, что если мы зашьем отверстие у перчатки, то все, что высокоученый доктор назвал «внешностью», станет теперь *черным*: но вот

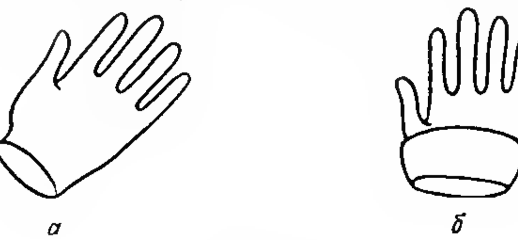


Рис. 163.

как быть со средним пальцем? Вывернули мы его наизнанку или же просто играем словами?

Ситус. Но это же не тор!

Джонс (*хитро*). Моему достопочтенному оппоненту нравится топологическая эквивалентность. Могу ли я предположить, что перчатка (после того как мы зашьем у нее отверстие) станет топологически эквива-

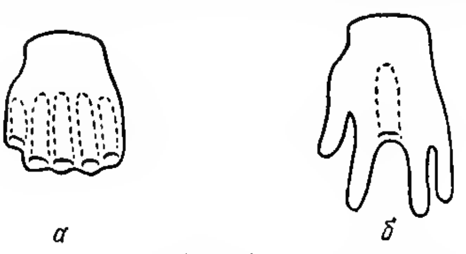


Рис. 164.

лентна сфере? Допустим, мы начнем с однопалой перчатки (рис. 165) и пришьем ее кончик к краю отверстия. Затем начнем совершать инверсию, как сказал бы доктор. Продолжим наши действия, но гляньте сюда и внемлите: нам никогда не удастся вывернуть перчатку наизнанку более чем наполовину, даже если мы загоним конец пальца внутрь. Если бы на кончике пальца была небольшая дырка, то мы получили бы фигуру, в точности гомеоморфную автомобильной камере.

С и т у с. И она оказалась бы вывернутой!

Д ж о н с. Не могу ли я вас попросить уточнить разницу между положением среднего пальца и остальных пальцев на рис. 164, *б*?

Рис. 165.

С и т у с. Она, мм... Но это же абсурд! Ага! Я знаю, в чем дело! (*Идет к доске.*) Вот перед нами (рис. 166)

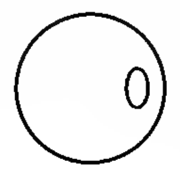
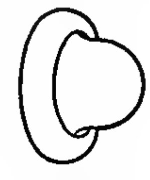



Рис. 166.

полая проколотая сфера. Сквозь дырку мы можем вывернуть ее наизнанку — вы, конечно, допускаете подобную возможность? Теперь я заклею дыру и вдавлю

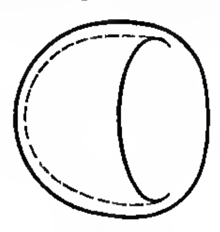


Рис. 167.

часть сферы внутрь (рис. 167) — аннулирует ли это таинственным (чтобы не сказать семантическим) образом половину всей инверсии?

Д ж о н с. В данном случае нет. Но ведь мы обсуждаем тор.

С и т у с. Смею ли я спросить, как может некий тор быть более вывернутым наизнанку, чем мой? У него

вся некогда внутренняя часть поверхности смотрит теперь наружу.

Джонс. Позвольте. (*Берет камеру и начинает манипулировать ножницами и быстро сохнущим клеем.*) Я разрезаю камеру поперек (рис. 168, *а*), затем полностью выворачиваю наизнанку образовавшийся при этом цилиндр (рис. 168, *б—г*) и вновь склеиваю концы (рис. 168, *д*). Мне кажется, что мы все согласимся с

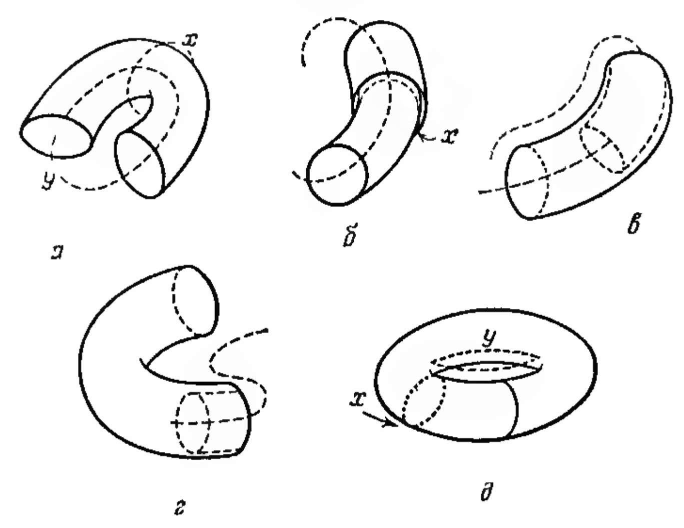


Рис. 168.

тем, что полученную фигуру действительно можно назвать вывернутым тором. Он выглядит так же, как и исходный тор, а не как полая ручка от чашки.

Ситус. В топологии вы не можете апеллировать к внешнему виду: где критерий того, что ваш тор более вывернут, чем мой?

Джонс. Давайте вернемся к вашим собственным рисункам. Мне хотелось бы обратить ваше внимание на один топологический инвариант: зацепленность...

Ситус. Как! Но это же не ...

Судья. Позднее, доктор, позднее. Продолжайте, мистер Джонс.

Джонс. Две замкнутые кривые, сцепленные между собой, нельзя расцепить с помощью топологической

деформации. Я провожу две такие кривые на ваших рисунках (рис. 157—161): одна из них, x, идет вокруг трубчатой части, а другая, y, внутри ее. Обратите внимание, эти кривые сцеплены между собой. Я нарисовал их на каждом этапе вашей так называемой инверсии, и можно заметить, что в конце они все еще остаются сцепленными!

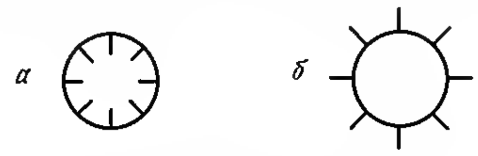


Рис. 169.

Ситус. Ну, и о чем это говорит?

Джонс. В моем случае они расцепляются. (*Показывает пунктирные линии на рис. 168.*)

Ситус. Так нечестно! Вы разрезали одну из петель... (*Здесь он осекается, так как осознает, что, даже если разрезать петли в его случае, зацепленность не изменится.*) Все тривиально: зацепленность не является инвариантом в n-мерном пространстве. Каждому известно, что именно по этой причине узел не может существовать в пространстве размерности, большей 3!

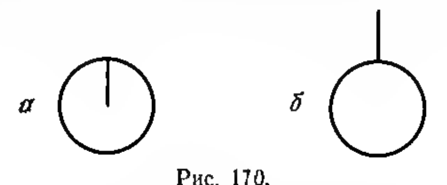


Рис. 170.

Джонс. Позвольте мне вернуться к главному аргументу моего оппонента, заключающемуся в том, что вся внутренняя сторона поверхности смотрит теперь наружу. Такое утверждение равнозначно тому, что если мы вообразим серию прямых, которые в поперечном сечении выглядят, как на рис. 169, *а*, то они находятся по соседству с внутренностью нашей поверхности. После манипуляций доктора они будут направлены вовне (рис. 169, *б*). Но, я надеюсь, он вспомнит, что рис. 170, *а* топологически идентичен рис. 170, *б*, и добавление еще

одиого измереиия позволит совершить иужиую деформацию.

Ситус. Но я же не пользовался четвертым измерением!

Джонс. Не пользовался им и я, когда расцеплял петли.

Ситус. Может быть, и иет, ио вы ранее в ваших собственных аргументах допустили существоваиие этих маленьких отрезков прямых, проведенных радиально от данной поверхности. Когда вы говорили, что половина моего тора осталась «точно такой же, как и вначале», то вы тем самым утверждали, что прямые, направлеииые друг на друга до инверсии, остались такими же и

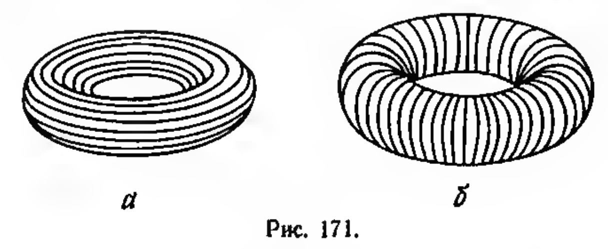


Рис. 171.

после иее. Но, по вашему собственному мнению, это тривиально с точки зрения топологии. Более того, если покрыть тор в продольном иаправлении сетью лииий (рис. 171, *а*), то мы обнаружим, что после моей инверсии они будут идти в поперечиом направлеиии (рис. 171, *б*), разумеется, на обеих сторонах поверхности. Это уже иастоящее измеиение!

Джонс. Я ис попимаю, причем здесь все это. С какой стороны это характеризует выворачивание наизианку? Я бы сказал, что это означает, что вся ваша деформация была совсем другого сорта! (*Они смотрят друг на друга, тяжело дыша.*)

Судья. Итак, я подведу итоги. В пользу доктора Ситуса говорит следующее: во-первых, внутрениюю сторону поверхиости он обратил наружу, и я склонен считать, что это именно и понимается обычно под «выворачиваиием наизнанку»; во-вторых, топологически говоря, он иачал и закончил свои манипуляции тором; накоиец, в-третьих, он помеиял продольную «сетку» на поперечную, С другой стороны, мистер Джоис тоже об-

ратил внутреннюю сторону поверхности наружу, он также начал и закончил свои манипуляции тором и, хотя он и не изменил сетку, зато ему удалось расцепить сцепленные между собой кривые, чего не сумел сделать доктор Ситус. Суд просит присяжных вынести свое решение. (*Может быть, читатель присоединится к присяжным и поможет им решить, какой приговор следует вынести. Автор обнаружил, что дискуссия по данному вопросу может заполнить весь вечер — в некотором смысле все дело в определении, хотя это и не делает предмет обсуждения тривиальным, как сказал бы наш уважаемый доктор.*)

10

НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ДИСКРЕТНОСТЬ

«Следующее число»

Педантичность во многом противоположна игре словами. Топология предпочитает быть неразборчивой в том, что касается точных размеров и форм, но она становится очень внимательной, когда речь заходит о точном смысле каких-то понятий или утверждений. Нам кажется понятным, что́ подразумевается под непрерывной линией: это линия без разрывов. Однако такое определение попросту тавтология, и для нужд математики его следует усовершенствовать. Что, собственно, представляет собой «разрыв»? Если разорвать в одном месте веревку, то она, конечно, распадается на две части; ну, а что получится, если мы порвем сеть? Далее, возьмем, например, целые числа от 1 до 20. В некотором смысле можно считать, что если мы опустим число 13, то в ряду этих чисел образуется разрыв, а если не опустим, то разрыва не будет. Однако, если сопоставить эти числа отметкам на линейке (допустим, что речь идет об обычной измерительной линейке с наименьшим делением, равным 1 мм), то как мы сделаем последовательность наших чисел непрерывной? Что это означает?

Можем ли мы вставить между ними некоторые дробные числа, а между теми — другие дробные числа и т. д. до бесконечности? Если этот процесс не оборвется, то есть если на каком-то шаге мы не сможем сказать, что все числа уже исчерпаны, то мы никогда не сумеем его закончить. Но если бы мы сказали, что наш процесс заканчивается на каком-то шаге, то как бы смогли утверждать, что не сможем вставить между данными числами новые, использовав более мелкие дроби?

Быть может, вместо этого мы могли бы начать с какого-то места, поставив на нем точку, а затем рядом с ней поставить еще одну и т. д. Но если, как обычно утверждают учебники геометрии, у точки есть положение, но нет величины (отсутствуют размеры в любом направлении), то, говоря, что другая точка, также не имеющая размеров, расположена *рядом с первой*, мы утверждаем тем самым, что *между ними нет расстояния*. Значит, они расположены в одном и том же месте, а поскольку единственное различие между точками заключается в их расположении, то это означает, что вторая точка попросту совпадает с первой. Следовательно, мы не можем поставить точку, *ближайшую к данной*. Это месть за педантичность, столь важную в топологии.

Похоже обстоит дело и с максимумами и минимумами. Если мы рассмотрим множество всех чисел от 1 до 2 включительно, то 1 будет среди них минимальным, а 2 — максимальным числом. Но если мы рассмотрим числа строго больше 1 и строго меньше 2, то все изменится. Минимальным должно быть следующее за 1 и большее 1 число, а масимальным — следующее за 2 и меньшее 2 число; однако ни того, ни другого числа мы указать не можем. (В первом случае у нас было то, что называется замкнутым числовым множеством, а во втором случае — открытое числовое множество. Хотя различие между ними может показаться несущественным, оно, как мы увидим позднее, когда речь пойдет о множествах — в особенности о множествах точек, — часто оказывается весьма важным.) Но какое отношение этот разговор о числах имеет к топологии?

Дабы объяснить это, мы должны уточнить, какой смысл можно вложить в понятие *множества*. Мы уви-

дим, что по отношению к множествам имеют смысл некоторые понятия и утверждеиия, которым нельзя придать разумный смысл, когда речь идет об отдельных элементах этих множеств. Это напоминает (хотя и ие во всех отиошениях) ситуацию в топологии, где игиорируются индивидуальные особенности, скажем, фигур, ограничеииых замкнутыми кривыми, а эти фигуры рассматриваются просто как совокупиость объектов, обладающих неким общим набором иивариантов.

Непрерывность

Когда что-то не является непрерывным, мы называем его дискретным. Набор всех целых чисел дискретен (хотя и бесконечен); песок на берегу моря дискретен; даже вода дискретна, если мы расщепим ее иа составляющие молекулы. Нельзя сказать, что числовая прямая непрерывна *потому*, что она содержит бесконечное число точек: на ней иаходится бесконечное число рациональных дробей, но как быть с бесконечным числом пустот, куда можно вставить новые дроби? «Рациональные», конечно, означает, что каждую из дробей можно представить в виде отношения целых чисел: n/m. Любое мыслимое рациоиальное число можно представить в таком виде ($8=8/1$), чего нельзя сделать в случае иррациональных чисел, вроде π или $\sqrt{2}$ (их можно лишь приблизить такими дробями).

Как правило, топологи предпочитают пользоваться словом «непрерывный» скорее по отношению к процессам, чем к пространствам (прямая — это одномериое пространство), но если мы должиы воспользоваться им, говоря о прямой, то *непрерывность означает, что мы можем сопоставить множество всех точек прямой множеству всех вещественных чисел.* Под вещественными мы понимаем как рациональные, так и иррациональные числа. Доказано, что иррациоиальных чисел по крайней мере столь же (бесконечно) много, сколь много и рациональных чисел[1]. Основное различие состоит в том, что рациональные числа можно перенумеровать, тогда как с иррациональными числами это не удается.

[1] На самом деле доказано, что иррациональных чисел в некотором (точно определяемом) смысле слова «гораздо больше», чем рациональных (см. Нивен А. Числа рациональные и иррациональные. — М.: Мир, 1966, приложение В). — *Прим. перев.*

Перенумеровать — это значит, что рациональные числа можно пересчитать по порядку: 1, 2, 3 и т. д. до ∞; слово «можно» здесь имеет тот смысл, что мы можем указать процедуру, позволяющую это сделать, не пропустив ни одного числа. В случае рациональных дробей, n/m, хотя мы и не можем пересчитать их в естественном порядке (поскольку никогда не можем указать дробь, точно «следующую» за данной дробью), существует одна остроумная уловка, позволяющая обойти эту трудность.

Все целые числа мы записываем в виде дробей: $1 = {}^1/_1$, $2 = {}^2/_1$ и т. д., а во всех остальных дробях мы производим максимально возможные сокращения, поскольку в противном случае мы встретились бы несколько раз с одним и тем же числом, например ${}^{12}/_{10}$ и ${}^6/_5$ и т. д. Теперь мы начинаем с ${}^1/_1$, затем идет ${}^1/_2$, далее ${}^2/_1$, ${}^1/_3$, ${}^3/_1$, ${}^1/_4$, ${}^2/_3$, ${}^3/_2$, ${}^4/_1$, ${}^1/_5, \ldots$ — при данном способе пересчета дробей все время возрастает[1] не величина дроби, а *сумма целых чисел, участвующих в ее записи*, то есть сумма числителя и знаменателя данной дроби. Так у ${}^1/_1$ эта сумма минимальна; далее идут ${}^1/_2$ и ${}^2/_1$ (дроби с одинаковой суммой мы записываем в порядке их возрастания); затем — ${}^1/_3$ и ${}^3/_1$ (сумма равна 4); далее ${}^1/_4$, ${}^2/_3$ и ${}^3/_2$ (сумма равна 5) и т. д. По мере продвижения вперед появляется все больше пропущенных дробей, вроде тех, что находятся между ${}^1/_4$ и ${}^1/_3$. Мы никогда не кончим этого процесса, однако так нам удается расположить дроби в новом (причем достаточно логичном) порядке, отчего каждое рациональное число появится в нашей последовательности дробей *один и только один* раз. Это значит, что мы перенумеровали *все* рациональные числа: 1, 2, 3 и т. д.

В приведенной здесь таблице под каждым рациональным числом написана сумма его числителя и знаменателя, а под ней порядковый номер данного числа:

${}^1/_1$	${}^1/_2$	${}^2/_1$	${}^1/_3$	${}^3/_1$	${}^1/_4$	${}^2/_3$	${}^3/_2$	${}^4/_1$	${}^1/_5$	. . .
2	3	3	4	4	5	5	5	5	6	. . .
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	. . .

Любое множество чисел (или точек, или чего угодно другого), которое можно пересчитать, дискретно

[1] Точнее, не убывает. — *Прим. ред.*

(счетиое множество). Когда хотят описать несчетное миожество, вместо слова *непрерывное* предпочитают употреблять слово *континуум*[1] (первое обычно примеияют к процессам). Переменное число «проходит» через все точки прямой: его «движение» непрерывно.

Таким образом, мы видим, что бесконечность возникает двумя разиыми путями: 1, 2, 3, ... до бесконечности или бесконечное число точек на отрезке прямой. Еще более важно отметить, что возникающая в этих примерах бесконечность являет собой бесконечность разных видов: счетная (в случае рациоиальных чисел) и иесчетная (в случае точек на прямой).

Окрестности

Читатель, быть может, помнит, что говорил в предыдущей главе мистер Джонс о некоторых прямых: они «находятся по соседству с внутренностью поверхности». Мы видели, что он имел в виду (имеино то, что было нзображено на соответствующем рисунке), хотя смысл его слов был довольно смутным. И все же наряду со всемн зтими педантичнымн предосторожностями относительно точек, бесконечности и т. п. полезно в некоторых вопросах быть, так сказать, «контролируемо неточными». Например, в начале гл. 7 мы упоминали теорему, в которой участвовали области «не больше заданной величины». Это звучит не очень точно, но означает, что данная теорема верна, независимо от того, сколь малой будет такая величина. Именно так мы поступаем, когда говорим, что «некий объект *имеет* данную величииу» и в то же самое время, что он «бесконечно мал, то есть не имеет размеров», хоть зто и звучит довольно фальшиво и ужасно неточно.

Точно так же полезно говорить, что некая точка данного пространства находится «достаточно близко» к другой точке. Это означает (подобно словам «заданная величиие» в упоминавшейся выше теореме), что данную точку можно выбирать «так близко ко второй

[1] Надо нметь в вcase, что слово *континуум* прнменяется далеко не ко всем множествам, элементы которых не удается перенумеровать (несчетным множествам), хотя по отношенню к множествам точек (прямой, плоскости или пространства), к множествам прямых, плоскостей и т. п. его прнменять можно. — *Прим. перев.*

точке, как вы пожелаете». Когда мы говорим об окрестности некоторой точки, то ничего не указываем относительно ее размеров, а требуем только, чтобы эта окрестность содержала данную точку и содержала ее таким образом, чтобы внутри этой окрестности можно было выбрать другую точку, настолько близкую к данной, насколько нам это будет угодно. Ничего не говорится конкретно, как далеко эта новая точка должна располагаться от первой, и, хотя в (метрическом) пространстве, в котором можно измерять расстояние, зачастую для обозначения диаметра окрестности пользуются символом ε (эпсилон), мы никогда не ограничиваем себя указанием конкретной величины ε. Часто употребляемое выражение «ε-окрестность точки P» означает, что все точки рассматриваемой окрестности удалены от P

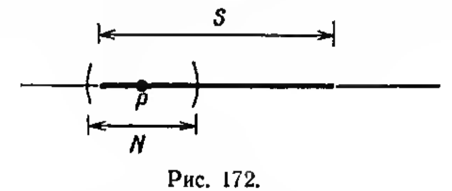


Рис. 172.

менее чем на ε. Обратите внимание, что мы говорим «менее», а не «не более», что означает — в данной окрестности нет точки, максимально удаленной от P (ср. с обсуждением вопроса о существовании максимумов и минимумов в первом разделе настоящей главы).

Все это, конечно, весьма приблизительно, однако допускает нужное уточнение. Допустим, что мы выбрали на прямой некий промежуток (интервал) S (рис. 172). Точка P принадлежит S, и у этой точки есть некоторая окрестность N. Во всяком случае, ясно одно: в N войдет *по крайней мере еще одна другая точка из* S. Точно так же можно сказать, что если мы определим промежуток S как «все точки, соответствующие вещественным числам, большим 1 и меньшим 2», то получим как бы одномерное пространство без концов — в этом «пространстве» нет ни максимального, ни минимального элемента (ср. с первым разделом настоящей главы). А поскольку мы договорились, что окрестность произвольной точки можно выбирать столь малой, сколь нам будет угодно, то мы можем сказать теперь,

что *у каждой точки из S есть окрестность, целиком содержащаяся в S* (то есть она не содержит точек, не входящих в S). Это означает не то, что мы не можем взять окрестности такими большими, чтобы в них вошли точки не только из S, но и S не принадлежащие, а что если окрестности достаточно малы, то они не содержат «посторонних» точек.

Разумеется, мы не могли бы утверждать это относительно концевых точек, но, как мы знаем, у S нет концов. Все дело, конечно, в определении, а потребность в точных определениях характерна для математики. Иногда отсутствие определения играет основную

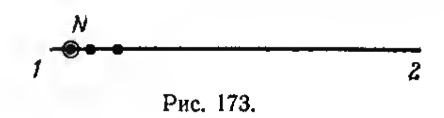


Рис. 173.

роль: во всяком случае, нужно четко понимать, насколько точно то или иное утверждение.

Следует еще раз подчеркнуть, что если мы рассмотрим участок прямой, соответствующий числам, большим 1 и меньшим 2, и выберем точку, близкую к 1, то всегда сможем выбрать другую точку, еще более близкую к 1 (рис. 173). Если затем кто-нибудь укажет новую точку, еще более близкую к 1, и станет утверждать, что эта точка настолько близка к 1, что между ней н 1 уже не осталось места, то мы ему заметим, что он попытался сделать невозможное: указать точку, *ближайшую* к 1. Следовательно, между его точкой и 1 еще осталось место; есть даже целая окрестность его точки, состоящая лишь из точек промежутка 1—2.

Как уже, вероятно, заметил читатель, описанный нами промежуток, или интервал, представляет собой то, что мы назвали *открытым множеством* точек. В замкнутом множестве (скажем, в том же промежутке, но уже содержащем концевые точки 1 и 2) приведенное выше утверждение относительно окрестностей оказывается неверным, ибо у концевых точек, 1 и 2, *нет* окрестностей, которые не содержали бы по крайней мере какой-то точки, меньшей 1 или большей 2, а 1 и 2 теперь входят в наше множество.

Предельные точки

«Предельная точка» означает в топологии не то, что мы могли бы думать, судя по ее названию. Это, вообще говоря, не граничная точка (хотя иногда бывает и так). Например, все точки прямой, соответствующие всем вещественным числам,— предельные. Обычное (но не единственное) определение предельной точки состоит в том, что *каждая* ее окрестность содержит другую точку из того же множества точек (в данном примере — другую точку прямой). Это звучит довольно странно до тех пор, пока мы не осознаем, что слово «предельная» употреблено здесь в некоем специальном смысле.

Приведем жизненный, хотя, быть может, и необычный пример, поясняющий ситуацию. Вы стойте лицом к стене и делаете по направлению к ней шаг, равный половине расстояния между вами и стеной; затем вы проходите половину оставшегося расстояния, далее — половину половины и т. д. Если на каждый шаг уходит 1 с, то вы никогда не достигнете стены, поскольку для этого нужно сделать бесконечное число шагов. Тем не менее стена — это предельная точка вашего движения. Пусть исходное расстояние равно 2 м, тогда на первом шаге вы проходите 1 м, затем $1/2$, $1/4$, $1/8$, $1/16$, ... м; все расстояние равно 2 м несмотря на то что оно получается как сумма *бесконечного числа дробей*. По условию вы каждый раз проходите только полпути до стены и никогда — весь оставшийся путь; с этой точки зрения вы никогда не доберетесь до стены. Здесь ситуация точно такая же, как и в известном парадоксе Зенона о быстроногом Ахиллесе и медлительной черепахе — сможет ли Ахиллес догнать черепаху?

Все мы знаем, что он ее догонит (назло всем определениям!), поскольку он не станет совершать этой бесконечной последовательности шагов. Ахиллес двигается с постоянной скоростью, и график его движения изображен на рис. 174. Этот график представляет собой прямую линию, поскольку скорость Ахиллеса постоянна, хотя он и проходит бесконечную последовательность отмеченных точек. Если бы он тратил 1 с на первые $1/2$ м и столько же на каждую последующую половину, то график движения совпал бы с пунктирной линией и Ахиллес никогда не догнал бы черепаху (наклон-

ная прямая сверху). Если же мы, однако, сложим *промежутки времени, за которые он на самом деле проходил соответствующие расстояния*, то получим в итоге суммарное время, которое будет вдвое больше времени, необходимого, чтобы пройти первую половину пути.

Причина, по которой и черепаха и стена стали предельными точками, состоит в том, что мы можем достичь их (приблизиться к ним) с помощью нашего «подкрадывающегося» процесса, а не в том, что *мы можем до них допрыгнуть*. Иными словами, мы можем приблизиться к ним так близко, как нам будет угодно

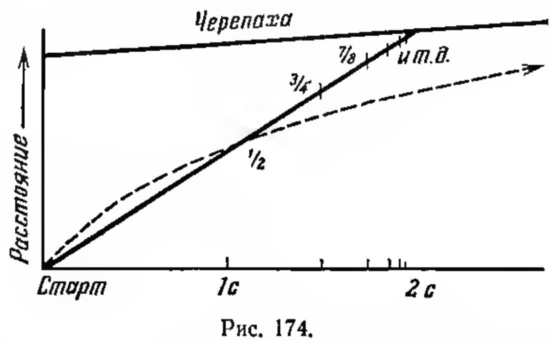


Рис. 174.

(что выглядит весьма произвольным, но очень важно в топологии). Пример предельной точки в двумерном пространстве мы приводим здесь как задачу. Для ее решения не требуется знания высшей математики — достаточно элементарной геометрии и здравого смысла.

Человек стоит на плоскости: он проходит 1 км на запад, затем $^1/_2$ км на север, далее $^1/_4$ км на восток, потом $^1/_8$ км на юг, затем снова половину этого расстояния на запад и т. д. Каждый раз он поворачивает строго под прямым углом и проходит ровно половину предыдущего расстояния, так что его путь похож на прямоугольную спираль, показанную на рис. 175.

Где он закончит свой путь? Легко заметить, что всего человек проходит 2 км, так что, двигаясь с постоянной скоростью, он доберется до места. Можно ли найти конечный пункт, пользуясь лишь циркулем и линейкой? Ответ приведен в приложении VI.

Еще один тип предельной точки (где основную роль играет время, а не пространство, поскольку положение

в пространстве здесь ие важио) — это точиый момеит, когда вас спасут, если вы потерпели кораблекрушеиие в море. Ваш корабль пошел ко дну: доберутся ли до вас спасатели «вовремя»? Это «время» могло бы быть предельиой точкой; но если бы речь шла о том, иа какой именно корабль вы сели, то оно могло бы и не

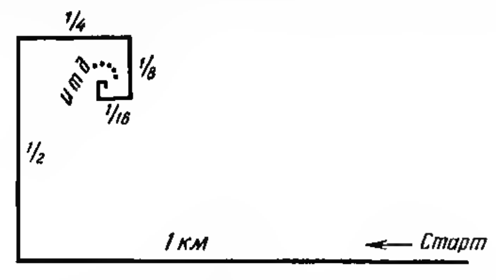


Рис. 175.

оказаться такой точкой. Все зависнт от коитекста: 2 не является предельной точкой, еслн мы рассматриваем его *как одно из целых чисел*, но оно станет ею, если мы рассмотрим его как сумму ряда 1, $^1/_2$, $^1/_4$ и т. д. или же как одно из вещественных чисел, расположенных, скажем, между —1 и +3.

11

МНОЖЕСТВА

Непротиворечиво или попросту верно?

Бертраи Рассел сказал как-то, что для математики характерио, что мы иикогда не знаем, о чем, собствеино, мы говорим. Это означает, что ныне математики интересуются ие истииой, а непротиворечивостью. Их занимает ие то, можио ли иекую закоиомерность применить к реальиому миру, а всегда лишь то, является ли она логически истииной, еслн рассматривать ее

в присущих ей границах и разбирать ее, сообразуясь лишь с присущими ей правилами.

Долгое время полагали, что евклидова геометрия применима к окружающему нас пространству, но, начиная с Эйнштейна, обнаружили даже визуально, применив сильные телескопы, что наше пространство, если взять достаточно большой участок Вселенной, вовсе не евклидово. Если бы дело обернулось по-другому, то это не сделало бы евклидову геометрию более или менее противоречивой, чем раньше: просто она случайно оказалась бы более применимой к окружающему нас миру; а математике нет дела до подобной применимости. Впрочем, разумеется, приятно, когда математику удается к чему-то применить.

По этой причине не следует ложно понимать математика, который на первый взгляд свободно говорит о бесконечности: он вовсе не собирается знать, о *чем именно он говорит* — по крайней мере не имеет в виду никакой «настоящей» бесконечности, если бы такая и существовала. Точно так же, когда геометр говорит о прямом угле, он вовсе не хочет сказать при этом, что абсолютно прямой угол существует где-либо на самом деле: он просто имеет в виду идеальный Прямой Угол, о котором можно логически сделать некое заключение. В математике существуют разные бесконечности, и мы говорим о них в разных контекстах. Именно соотношения играют роль более важную, чем сами объекты, связанные этими соотношениями. Топологи, как и большинство математиков, в конце концов отказались от всякого чувственного восприятия: сначала топологи имели дело с осязаемыми объектами, а затем все в большей мере их стал занимать вопрос, *как обращаться с такими объектами*. Наконец объекты, воспринимаемые органами чувств (первоначальный предмет обсуждения), были полностью отброшены. На этом пути математики часто получают свои наилучшие результаты.

Как мы видели ранее, топологов интересуют инвариантные свойства объектов; но лучший способ представить вещи в самом общем виде и в то же время сохранить между ними некоторые соотношения, позволяющие говорить о топологических инвариантах,— рассматривать эти объекты как некоторые совокупности, или *множества*. Мы покажем сейчас, как можно манипули-

ровать с множествами, не имея ни малейшего представления о том, множествами каких именно объектов они являются.

Диаграммы Венна

Давайте начнем с множества книг на полке; одни из них в переплете, а другие — в мягкой обложке. Мы пренебрежем их порядком и размерами; но в данном случае мы знаем, о чем говорим: не обо всех книгах в мире, а только о книгах из нашего множества S. Некоторые из них — в мягкой обложке; они образуют под-

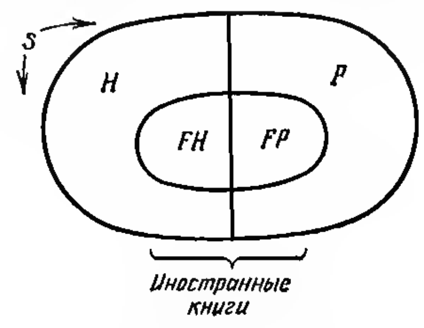
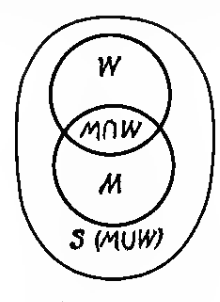


Рис. 176.

множество P нашего множества S. Обычное определение гласит, что P есть подмножество S в том случае, *когда каждый элемент из P содержится в S* (в нашем случае элемент — это книга). Кратко это записывают так: $P \subset S$. Книги в переплете также образуют подмножество: $H \subset S$. Некоторые книги — иностранные, такие книги входят в оба подмножества, P и H. На рис. 176 мы приводим соответствующую диаграмму, на которой множества и подмножества изображены как области, но расположение и относительные количества элементов этих подмножеств никак не представлены. Очевидно, книга не может одновременно быть в твердом переплете и в мягкой обложке, так что эти два множества (каждое подмножество можно рассматривать как самостоятельное множество) не перекрываются. Они взаимно исключают друг друга, *не соединяются между собой*. На рис. 176 мы видим, что большая область S разделена на H и P и оба этих подмноже-

ства перекрываются с небольшим овалом, изображающим иностранные книги, в результате чего образуются два подмножества множеств H и P: FH и FP.

Мы можем нарисовать другую диаграмму, которая покажет, кто какие книги читал. Для этого мы придадим ей более привычный вид *диаграммы Венна* (рис. 177): M — книги, которые читал муж, W — книги, которые читала жена. Общая часть двух этих областей соответствует книгам, которые читали оба супруга; она



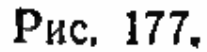


Рис. 177.

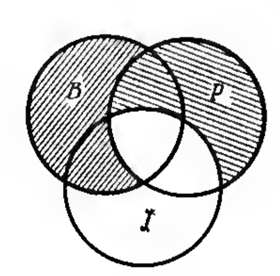


Рис. 178.

образует *пересечение* M и W, что записывается так: $M \cap W$. Непрочитанные книги соответствуют части S, расположенной вне M и вне W. Все прочитанные книги в свою очередь образуют *сумму* (объединение) множеств M и W. Она обозначается через $M \cup W$ и содержит пересечение $M \cap W$. Сумма состоит из элементов, которые принадлежат одному из данных множеств или обоим множествам. Таким образом, непрочитанные книги мы можем записать как $S - (M \cup W)$. Тот факт, что множества H и P на рис. 176 не пересекаются, мы можем символически записать так: $H \cap P = 0$.

Диаграммы Венна можно использовать для иллюстрации некоторых логических соотношений. Пусть, например, известно, что (1) все наши книги напечатаны и что (2) во всем, что печатается, используется только черная краска; тогда (3) во всех книгах использована только черная краска. Проиллюстрируем это на диаграмме Венна. На рис. 178 круг B изображает все наши книги, P — все, что печатается; I — все, где используется только черная краска. Поскольку у нас нет ненапечатанных книг, мы рассмотрим лишь пересечение

$B \cap P$, а остальную часть B отбросим. Затем мы отбрасываем часть P, не содержащуюся в $P \cap I$, ибо все печатается только черной краской. Теперь мы видим, что от B осталось только $B \cap I$, то есть *во всех книгах использована только черная краска.* Все это столь же просто, сколь верно; однако если мы попытаемся проделать то же самое для четырех множеств, *ни одно из которых не исключает ни одного из оставшихся* (вроде прочитанных и непрочитанных книг), то дело запутывается. По существу, маленькая головоломка состоит в том, чтобы нарисовать диаграмму Венна для четырех множеств, помня, что в ней должны присутствовать все возможные комбинации (части, принадлежащие одновременно одному, двум, трем или четырем множествам). При этом лучше выписывать вначале все комбинации: их всего 15 (число таких комбинаций всегда на 1 меньше 2^n, где n — число множеств: $2^n - 1$, если только мы не рассматриваем комбинацию, в которую не входит ни одно множество; в этом случае число всех комбинаций равно 2^n). Здесь стоит упомянуть, что вы не обязаны изображать множества в виде кругов: они могут принимать форму вытянутых овалов. Ответ приведен в конце данного раздела.

Подмножество, не содержащее ни одного элемента (вроде множества ненапечатанных книг), называется *пустым* множеством. Введение такого множества некоторые топологи рассматривают как некое искусственное соглашение; если рассматривать его всегда, то это может порой привести к усложнениям, однако в алгебре множеств оно оказывается весьма полезным. Пример, в котором пустое множество имеет какой-то смысл и который не выглядит полностью алгебраическим, состоит в следующем. Рассмотрим известную игру в двадцать вопросов, которая состоит в том, что один из участников загадывает некий объект, а второй задает ему двадцать вопросов, на которые получает в ответ только «да» или «нет». После двадцатого вопроса он должен отгадать, что задумал его партнер. Допустим, что первый участник загадал «дырку от бублика», а второй спросил его: «Это овощ?» (в противоположность минералу); тогда очень трудно ответить «да» или «нет», поскольку можно считать, что ответ зависит от того, что окружает бублик (например, воздух или молоко).

В конце концов, форма дырки образована *с помощью* (если не из) материала, из которого сделан бублик; так что, может быть, лучший ответ состоит в том, что это пустое множество «бубликовых частиц». В игре 2 подобные ответы не допускаются — может, это и к лучшему.

Не говоря уже о сложности, связанной с тем, что пересекающихся множеств много, есть достаточно хитрые теоремы, где участвуют только три множества, однако такие теоремы никак не укладываются в голове. Возьмем, например, соотношение

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Оно означает: «*Сумма A и пересечения B с C равна пересечению суммы A и B с суммой A и C*». В такой формулировке это трудновато понять. На обычном языке это могло бы означать: «Группа людей с головой неправильной формы или курчавых блондинов (*или* тех и других одновременно) состоит из тех, кто одновременно находится в группе, состоящей из людей с головой неправильной формы или курчавых (*или* и тех и других одновременно), *и* в группе, состоящей из людей с головой неправильной формы или блондинов (*или* тех и других одновременно)». Все это звучит довольно двусмысленно: при одном прочтении мы можем делать упор на *или*, а при другом на *и*. Не ввела ли нас в заблуждение грамматика? Предельно сконцентрировавшись на точном значении приведенной выше фразы, мы можем частично впасть в гипнотическое состояние. Однако посмотрите на рис. 179. С помощью диаграммы Венна (*а*) все становится ясным. В случае *б* у нас есть весь круг *A* (люди с головой неправильной формы). В случае *в* представлено пересечение $B \cap C$ (курчавые блондины, а не *B или C*). В случае *г* мы объединяем эти множества: $A \cup (B \cap C)$. Затем мы разбираемся с правой частью приведенного выше равенства. В случае *д* изображена сумма *A* и *C* (включая пересечение — то есть группа, состоящая из людей с головой неправильной формы или блондинов или тех и других одновременно), а в случае *е* представлена сумма *A* и *C* (группа, состоящая из людей с головой неправильной формы или курчавых или тех и других одновременно). В случае *ж* мы накладываем друг на друга фигуры *д*

и *е*, дабы увидеть, где они перекрываются, и убеждаемся, что при этом получается то же, что и в случае *г*. А это нам и требовалось доказать.

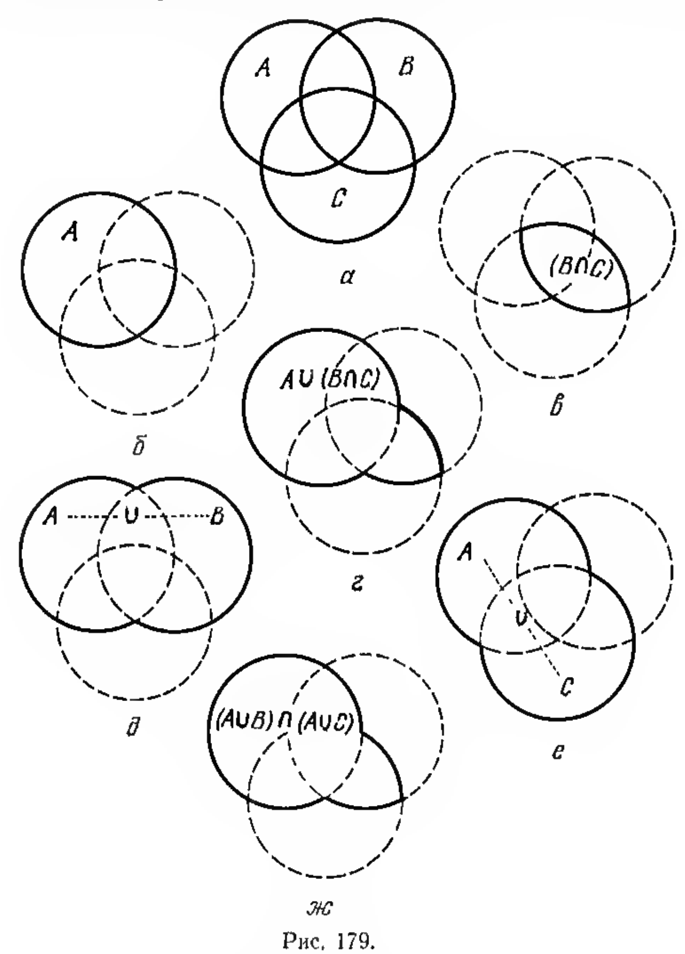


Рис. 179.

Работая с диаграммами Венна, иногда полезно применять метод удаления ненужных частей, как в случае, представленном на рис. 178. Из рис. 176 мы могли бы сделать рис. 180, на котором удалено пересечение книг в переплете и в мягкой обложке, поскольку ни

одна книга не может оказаться той и другой одновременно: $H \cap P = 0$. Затем мы удаляем часть иностранных книг, расположенную вне H и P, поскольку у нас нет книг вовсе без обложки: $F - (H \cup P) = 0$. Но этот рисунок не сообщает нам ничего нового, чего бы мы не знали и раньше. Напротив, в случае, который мы проследили по рис. 179, метод удаления мог бы нас запутать, если бы члены суммы были записаны в обратном порядке: $(B \cap C) \cup A$. Мы могли бы, к несчастью для

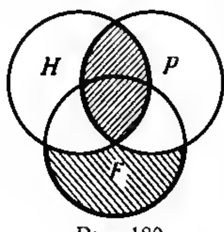


Рис. 180.

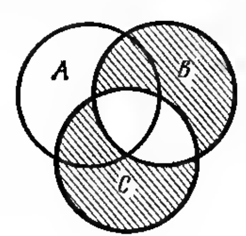


Рис. 181.

себя, сначала удалить те части B и C, которые не пересекаются (рис. 181), а затем прибавить результат к A (*ко всему* A); при этом нам пришлось бы восстановить части A, удаленные ранее. Таким образом, использование жирных линий или по крайней мере последовательных рисунков оказывается иногда понятней метода удаления.

Сведем теперь воедино все наши определения.

1. *Подмножеством* множества S называется множество, каждый элемент которого принадлежит $S : A \subset S$. (Когда мы говорим, что элемент p множества *принадлежит* (или *содержится* в) S, то пишем $p \in S$.)

2. *Суммой* двух множеств A и B называется множество, все элементы которого принадлежат хотя бы одному из множеств A и $B : A \cup B$.

3. *Пересечением множеств* A и B называется множество, все элементы которого принадлежат как A, так и $B : A \cap B$.

4. *Дополнением* (в S) к подмножеству A множества S называется множество, состоящее из тех элементов S, которые не принадлежат $A : S \setminus A$.

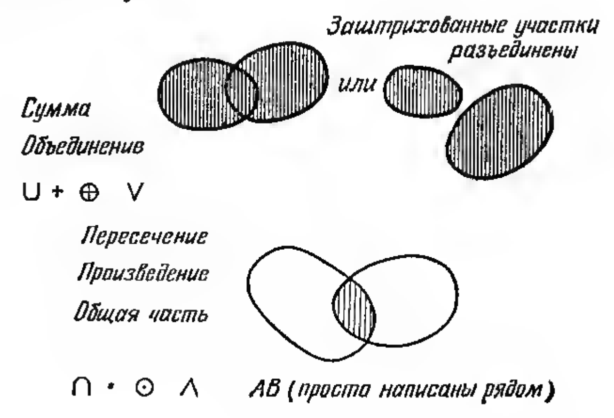
Понятие дополнения играет важную роль в топологии; мы можем сейчас же применить его к диску: если

покрасить диск, расположенный на поверхности, в черный цвет, то его дополнение останется незачерненным. Дополнение множества S в пространстве U можно записать как $U \setminus S$. Еще более важным оно становится в применениях теории множеств к топологии. В теории множеств, как и в геометрии, мы находим много теорем (не всегда очевидных, порой они выглядят даже несущественными), которые тем не менее помогают построить связное и жизнеспособное целое. Мы приведем здесь несколько таких теорем, которые читатель может доказать с помощью диаграмм Венна. (*Кстати*, быть может, неплохо выписать отдельно приведенный список и держать его перед глазами до тех пор, пока вы не привыкните к символам: $\subset$ — *подмножество* множества; $\in$ — *элемент* множества; $\cup$ — сумма; $\cap$ — пересечение; $A \setminus B$ — дополнение к B в A.)

1. Если $A \subset B$, то $A \cup B = B$.
3. Если $A \subset B$, то $A \cap B = A$.
3. Если $A \subset B$, а $B \subset C$, то $A \subset C$.
4. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
5. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Прежде чем двигаться дальше, мы должны предупредить читателя, что указанные символы не являются единственно возможными. В книгах на ту же тему вы можете обнаружить и другие символы. Некоторые из них мы здесь приводим.

Один из двух или оба:



Элемент множества:

∈, иногда, если этот символ мал, его можно спутать с греческой буквой ε (эпсилон).

Ответ на приведенную выше головоломку с четырьмя множествами содержит рис. 182. Попытайтесь

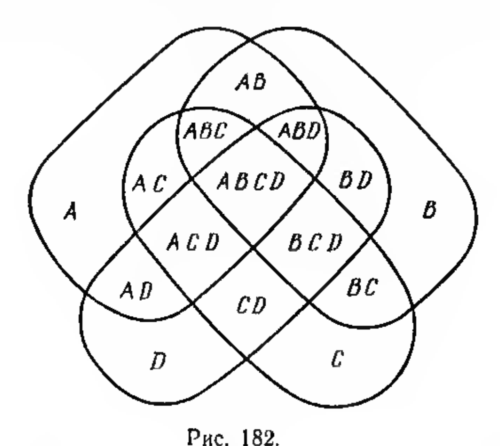


Рис. 182.

сделать то же самое с пятью множествами. Ответ приведен в приложении VII.

Открытые и замкнутые множества

До сих пор мы говорили о множествах людей или книг: в топологии же множества обычно состоят из точек. Когда под этими точками понимается то же, что и в геометрии, то пространство, в котором они находятся, топологи называют *евклидовым*. Например, плоскость сама по себе образует двумерное евклидово пространство (которое часто обозначают через E^2). Прямая — это E^1; кроме того, есть E^3, E^4 и т. д. Пространства, о которых мы собираемся сейчас поговорить, евклидовы; все они окажутся также и *метрическими* пространствами. Прежде чем объяснить смысл этого термина, следует вспомнить, что мы стремимся всегда к наибольшей общности. Поэтому мы надеемся обнаружить соотношения и теоремы, применимые к любому пространству, где не придется делать какие-либо измерения и где точки не будут более евклидовыми точками,

а просто *некими неопределенными объектами*, к которым можно мысленно применить данные соотношения. Подобный способ обобщения естествен для математики: шесть пар равны дюжине, независимо от того, идет ли речь о булках или днях.

Когда в топологии появляются метрические пространства, это значит, что точки располагаются в некотором порядке в том смысле, что если расстояние между точкой a и точкой b равно нулю, то $a = b$. Точно так же сумма расстояний между a и b и a и c больше или равна расстоянию от a до c (рис. 183, равенство достигается только в случае, когда $a = b$ и/или $b = c$).

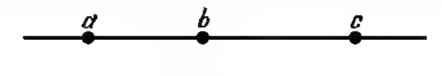


Рис. 183.

Все это очень просто, но обратите внимание, что здесь ничего не говорится о том, *насколько больше*: только больше; или равно; или меньше. Тем не менее в понятие метрического пространства входит расстояние, а в топологии, как правило, стараются этого избегать. Это не значит, что в топологии нарушаются ее собственные правила, а просто, что к каждому специальному случаю применяются свойственные ему методы. Когда эти методы применяются к пространству без всяких ссылок на расстояние, то вопрос об открытости и замкнутости приобретает первостепенное значение. Первостепенное, поскольку эти свойства сохраняются при любой деформации (коль скоро мы отбросили расстояние).

Давайте рассмотрим пространство, состоящее из точек некоторой прямой; тогда простейшим примером открытого множества будут служить «все точки, соответствующие числам *большим* 0 *и меньшим* 1». Замкнутое множество образуют «все точки, соответствующие числам *не меньшим* 0 *и не большим* 1». Но мы можем дать лучшие определения.

Относительно «открытости» мы можем в большей или меньшей мере повторить то, что уже говорили раньше: точечное множество (множество точек) называется *открытым, если у каждой его точки есть окрестность, целиком содержащаяся в этом множестве.* Вспом-

нив, что мы говорили ранее об окрестностях, понять это определение довольно легко. Если у «вселенной», в которой лежит наше множество, одно измерение (бесконечная прямая), то открытым множеством будет промежуток без концов, или интервал. (Концевые точки называются также граничными точками.)

Что касается «замкнутости», то здесь определение не будет просто обратным к предыдущему. Оно гласит: *множество называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки.* Это звучит довольно разумно, но почему здесь вдруг появляются предельные точки? В определении следует подчеркнуть слово «все».

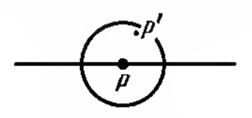


Рис. 184.

В предыдущем примере открытое множество состояло только из предельных точек, но отсутствующие концевые точки, хотя и не принадлежат данному множеству (в силу его определения), тоже представляют собой его предельные точки, ибо их можно сколь угодно приблизить точками нашего множества (как это объяснялось ранее). В данном множестве можно указать точку, сколь угодно близкую к любому из концов: значит, концы интервала — это его предельные точки. Если мы добавим теперь к нашему множеству оба конца, то новое множество будет содержать уже *все* предельные точки и, следовательно, окажется замкнутым.

Если бы мы в определении сделали упор не на предельные, а на концевые (граничные) точки, то это не позволило бы нам разобраться в следующей ситуации. Допустим, что наш интервал без концов расположен не в одномерном пространстве, а на *плоскости*. Тогда, очевидно, ни у одной из его точек нет окрестности, целиком расположенной внутри данного множества, ибо теперь окрестности представляют собой уже не участки прямой, а двумерные области (рис. 184). Это происходит потому, что объемлющее пространство двумерно, даже если наше множество и одномерно, и окрестности обязательно содержат точки вроде p', которые вовсе не

лежат на данной прямой. Следовательно, наше множество не является открытым. Тогда, наверное, оно замкнуто? Как ни странно — нет. Произвольное множество не обязано быть либо замкнутым, либо открытым. Наше множество не оказалось ни тем, ни другим, и в этом состоит еще одна причина, по которой в определении замкнутого множества участвуют предельные точки.

В первом примере множество *не* было замкнутым потому, что оно не содержало всех своих предельных точек (отсутствовали концевые точки); теперь мы встретили множество, не являющееся ни открытым, ни замкнутым. А может ли множество быть одновременно и открытым, и замкнутым? Да, может: в предыдущем примере таким множеством была вся плоскость. Поскольку она бесконечна, у нее нет концевых точек, так что нельзя ничего говорить о включении их в данное множество: следовательно,— это *открытое* множество. Но плоскость содержит все точки, значит, и все предельные точки, поэтому она и *замкнута*. Все это выглядит крайне необычным.

Таким образом, в случае плоскости мы имеем: (1) *открытые множества*, например внутренность некоторой области (скажем, треугольника), поскольку она не содержит границу, у всякой ее точки есть окрестность, целиком ей принадлежащая; (2) *замкнутые множества*, например треугольник вместе с границей; (3) множества *в одно и то же время открытые и замкнутые*, например все бесконечное пространство (в случае любого числа измерений); (4) множества, не являющиеся *ни открытыми, ни замкнутыми*, например внутренность двумерной области в трехмерном пространстве (по тем же причинам, что и интервал на плоскости). Дабы пополнить список символов и определений, скажем, что открытое множество называется также *областью*.

Используя идею диаграмм Венна, но ничего не рисуя, мы можем показать, что дополнение к открытому множеству S замкнуто: $U \setminus S$ замкнуто в U (ничего не говорится относительно его внешних, несуществующих границ). Действительно, поскольку S не содержит граничных точек, все они находятся в $U \setminus S$. По аналогичным причинам справедливо и обратное утверждение: дополнение к замкнутому множеству открыто. Читатель ради собственного удовольствия может доказать, что

сумма двух открытых множеств открыта и пересечение двух замкнутых множеств замкнуто.

Относительно открытого множества можно добавить еще вот что: объединение этого множества и множества его предельных точек называется его *замыканием* (записывается $\bar{S}$). Таким образом, $\bar{S}$ замкнуто, ибо уже содержит все предельные точки.

Окрестности, определение которым мы дали выше, можно рассматривать как открытые множества (хотя некоторые топологи считают их замкнутыми по причинам слишком непонятным, чтобы мы могли здесь в них вдаваться). Первая точка зрения несколько более приятна.

Мы встречались с множествами, целиком состоящими из предельных точек. А как обстоит дело в случае множеств, лишенных таких точек или по крайней мере состоящих не только из них? Об одном таком множестве мы упоминали раньше, хотя и не называли его множеством: речь идет о точках, соответствующих числам 1, $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_8$, ... и т. д. на евклидовой прямой. Мы могли бы точно так же взять 1, $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$ ..., и это тоже было бы множеством, ни одна из точек которого не являлась бы предельной, *за исключением последней точки* 0. Действительно, у каждой точки данного множества, за исключением 0, можно выбрать столь маленькую окрестность, чтобы она не содержала других точек этого множества. Точка 0 будет предельной, поскольку к ней сходится данная последовательность, и, значит, члены этой последовательности подходят к ней сколь угодно близко.

Мы можем даже пойти дальше и сказать, что если множество состоит из дробей, сходящихся к 0, то *ни одна из точек*, соответствующих всем вещественным числам на евклидовой прямой, не является предельной точкой *данного множества* (за исключением 0). Действительно, поскольку мы не можем указать точку, ближайшую к некоторой точке нашего множества, мы не можем тем самым назвать и точку, у которой не было бы достаточно малой окрестности, не содержащей точек нашего множества. Запутанно, но неопровержимо.

У только что упомянутого множества была лишь одна предельная точка. А нельзя ли указать множество вовсе без предельных точек? Можно, примером такого

множества служат точки, соответствующие, скажем, 1, $^1/_2$, $^1/_3$, ... $^1/_{10}$ на евклидовой прямой. У этого множества, очевидно, нет предельных точек. То, что у каждого *бесконечного* множества есть по крайней мере одна предельная точка (не обязательно принадлежащая данному множеству), гарантируется одной точной интуитивно понятой теоремой (Больцано — Вейерштрасса). Представим себе наше множество как множество точек, расположенных в некоторой области (*где-то* внутри ее). Их расположение может быть совершенно

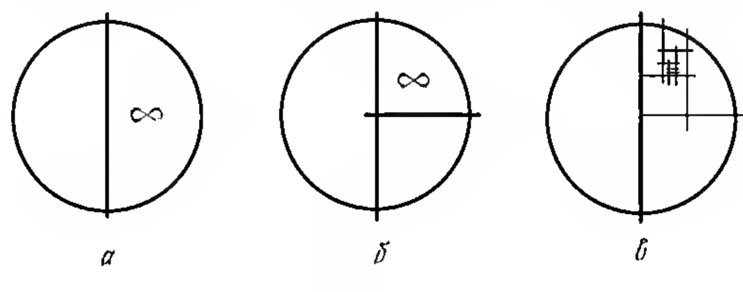


Рис. 185.

произвольным (например, в предыдущем примере весь бесконечный «хвост» сосредоточивался только вблизи нулевого конца). Проведем через середину нашей области произвольную прямую (рис. 185, *а*); тогда по крайней мере с одной стороны от данной прямой, скажем справа, находится бесконечно много точек данного множества. Разобьем далее эту половину области новой прямой (рис. 185, *б*) и поставим тот же самый вопрос; пусть теперь бесконечно много точек нашего множества окажется в верхней части. Будет продолжать этот процесс, деля на каждом шаге соответствующую часть области пополам (рис. 185, *в*). В конце концов эта уменьшающаяся часть стянется в некоторую точку, где «накапливается бесконечность». По построению она и будет предельной точкой.

Если предельная точка (снова в силу построения) окажется вне данного множества, мы все равно ее обнаружим. Разумеется, в этом случае она окажется на границе данного множества (будет принадлежать его

замыканию). Так получилось бы, если бы мы в приведенном выше примере не включили в множество предельную точку 0. С другой стороны, если бы наше бесконечное множество было устроено вроде евклидовой прямой (скажем, все вещественные числа от 1 до 2) и у него в окрестности каждой точки было бы бесконечно много других точек, то на каждом шаге описанного выше процесса мы могли бы взять любую половину, так что предельную точку удалось бы получить в любом месте нашего множества (это согласуется с тем, что множество целиком состоит из предельных точек).

То, что никто нам не скажет, какую именно половину следует брать на каждом шаге, не важно: такая половина *существует*, и это гарантирует нам существование предельной точки.

Еще одно любопытное свойство бесконечного множества состоит в том, что у него может оказаться подмножество, между элементами которого и элементами *всего множества* удается установить взаимно-однозначное соответствие. Мы можем взять, например, бесконечное множество книг, перенумерованных по порядку 1, 2, 3 и т. д., и выбрать среди них книги с четными номерами; в результате получится подмножество E множества всех книг $B: E \subset B$. Теперь заново перенумеруем книги входящие в E: первая, вторая, третья и т. д. Далее сопоставим друг другу книги из E и из B с одинаковыми номерами (для E берутся новые номера). Это противоречит здравому смыслу: нам кажется, что книг с четными номерами меньше, чем всех книг вообще. Но факт остается фактом: между всеми книгами и книгами с четными номерами можно установить взаимно-однозначное соответствие, так что в этом смысле E и B состоят из одинакового (бесконечного) числа элементов[1].

Преобразования

Преобразование — это соответствие между двумя объектами; его называют также *функцией*. Этот термин несколько двусмыслен: он может означать либо сам процесс преобразования, либо правило, управляющее этим процессом, либо результат процесса, либо, нако-

[1] См. примечание на стр. 375.

нец, преобразуемый объект *и* то, во что он переходнт в результате преобразования. В последнем случае термнн «функцня» оказывается более подходящим. Ранее, говоря об инвариантах, мы упоминалн, что онн выдерживалн деформацню: в данном контексте деформацня — это преобразование.

Но это слово употребляется н в более общем смысле: когда мы устанавлнвалн соответствне между книгами с четнымн номерамн н всемн кннгамн, то это тоже было преобразованнем. Здесь слово «функцня» скорее относится к тому, что называют *упорядоченными*

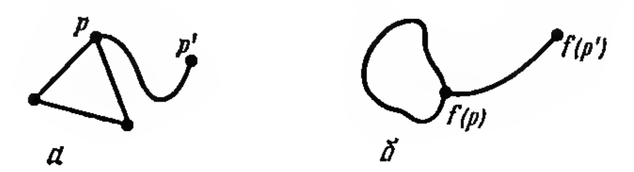


Рис. 186.

парами (в нашем случае — к кннгам, но это могут быть н точки). Как только мы скажем, что каждый элемент некоторого множества переходнт в элемент (нлн *соответствует элементу*) другого множества, перед намн — преобразованне. Возвратнвшнсь назад к тору, который был нзогнут (преобразован) в чашку с ручкой, мы можем отметнть каждую его точку и провести от нее стрелку к соответствующей точке на чашке. В этом случае мы моглн бы говорить о точках чашки, расположенных где-то вокруг дыры в ручке, что онн получнлись нз точек, расположенных где-то около дыры тора; но сверх этого трудно что-либо сказать еще, особенно когда речь пойдет, скажем, о том, нз какой части тора получнлнсь точкн верхнего ободка чашки.

Это соответствне в одно н то же время н слишком жестко, и слншком неопределенно. Например, когда мы говорим, что фнгуры, нзображенные на рис. 186, *а*, эквивалентны, то можем с определенностью лишь указать, какне точкн соответствуют точкам p н p'. Эти точкн в случае *б* обозначены через $f(p)$ и $f(p')$, где символ f означает *функцию*. Мы не можем сказать, что какая-либо другая точка, выбранная на фнгуре *а*, соответствует

такой-то точке на фигуре *б*, хотя мы и *можем* сказать, что *никакая* точка на замкнутой кривой фигуры *a* не соответствует *никакой* точке «отростка» на фигуре *b*. Но при таком преобразовании кое-что сохраняется: точка, где «отросток» соединяется с замкнутой кривой, и свободный конец отростка; именно поэтому нам и удалось установить, куда переходят точки p и p'.

Ранее, когда мистер Джонс и доктор Ситус напоминали друг другу, что фигуры, изображенные на рис. 187,

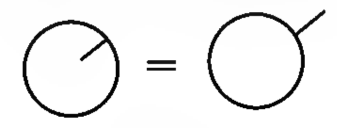


Рис. 187.

идентичны, они имели в виду это довольно общее соответствие. Здесь стоит вспомнить, что в начале этой книги мы при допустимых деформациях разрешали проводить разрезы, если они в конце вновь ликвидировались.

Например, мы можем определить, что фигуры, изображенные на рис. 188, эквивалентны. Действительно, обе они состоят из двух замкнутых кривых, *a* и *b*, и на *a* расположена вершина *c*, где *a* соединяется с линией *d*, на которой расположена другая вершина *e*, где *d* соединяется с *b*. Из *c* выходит еще одна линия *f* со свободным концом в *g*. Какие еще соответствия можно здесь указать? (Ответ см. в конце главы.)

Эти довольно разные по виду типы преобразований имеют сходные черты, но мы можем указать для них и еще кое-что общее. В каждом случае мы устанавливаем соответствие между точками согласно некоему правилу, или закону, или функции f. Если задана функция, или преобразование множества A в множество B (рис. 189), то мы говорим, что у точки p из A есть образ $f(p)$, принадлежащий B. Это же верно и для подмножеств: у подмножества $a \subset A$ есть образ $f(a) \subset B$. Кроме того, используется и символ f^{-1}: под $f^{-1}(x)$ понимают точку из A, образом которой служит x; эту точку называют также прообразом x.

Мы ранее говорили, что слово «непрерывный» обычно применяют по отношению к процессам, то есть к

функциям. *Непрерывное преобразование* — это такое преобразование, при котором достаточно близкие точки из A переходят в достаточно близкие точки из B (это

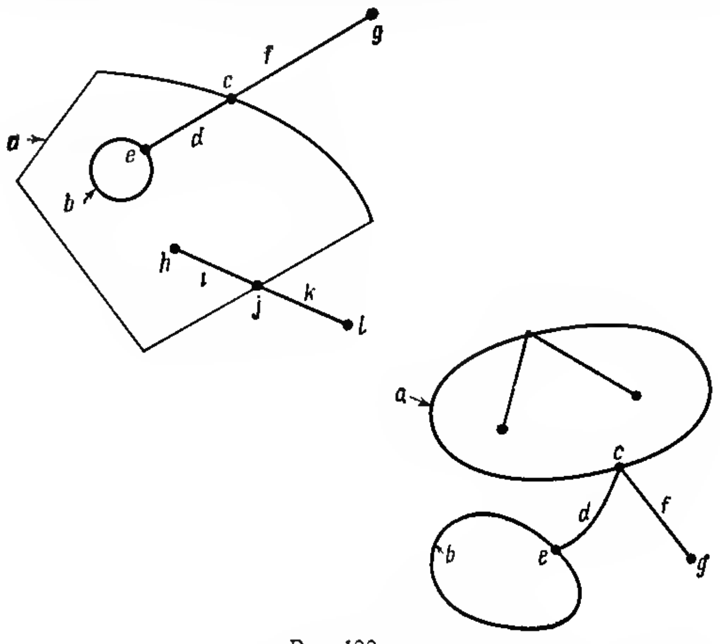


Рис. 188.

следует понимать в том же духе, что и проводившиеся ранее рассуждения об окрестностях). Как и прежде, мы

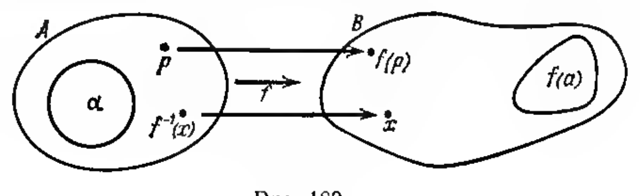


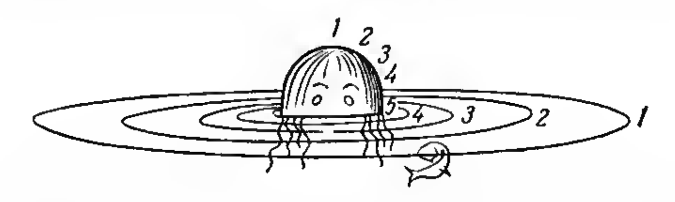
Рис. 189.

можем улучшить такое определение. При непрерывном преобразовании множества A в множество B любое открытое подмножество $a \subset A$ переходит в *открытое* подмножество $f(a) \subset B$. Напомним, что множество на-

зывается открытым, если *у каждой его точки* есть окрестность, целиком содержащаяся в данном множестве. Не входя в пугающие детали, заметим только, что это гарантирует возможность выбирать сколь угодно близкую (как в случае предельной точки) пару точек в *A* *и* их образов в *B*. Главное — это то, что непрерывность приводит к понятию *отображения.*

Отображение

Карта бывает порой фантастически не похожа на тот объект, который она изображает, даже если этот объект евклидов и «геометричен» в обычном смысле слова.



Если мы проведем концентрические круги на полусфере и спроектируем их на плоскость, то получим совсем разные результаты в зависимости от того, где мы выберем центр проектирования.

Если мы поставим полусферу на плоскость, как показано на рис. 190, а за центр проектирования выберем точку *S*, то круги изобразятся на плоскости тоже серией расширяющихся кругов; но только по мере приближения кругов на сфере к большому кругу соответствующие круги на плоскости будут расширяться неограниченно, так что образ большого круга уйдет в бесконечность. Образы кругов, близких к нижней точке *o*, более похожи на свои прообразы, так что в самой точке *o* образ и прообраз сливаются друг с другом. С другой стороны, на рис. 191 показано, что получится, если мы перевернем полусферу: большой круг совпадет со своим образом; а по мере нашего продвижения вверх круги на полусфере будут становиться все меньше, тогда как их образы будут представлять собой систему неограниченно расширяющихся кругов. Образ вершины *S* уйдет в бесконечность. Это похоже на случай с человеком в воде, когда его макушка также образует круг, но

расширяющиеся круги по размерам более походят на свои прообразы.

Все это примеры отображений: любое правило, согласно которому элементы одного множества переводятся в элементы другого множества, представляет со-

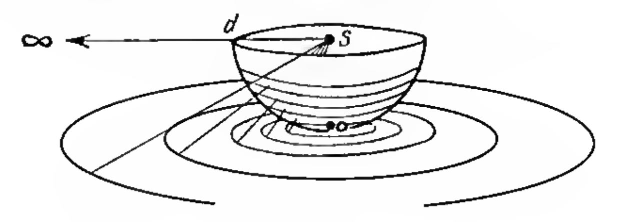


Рис. 190.

бой отображение, даже когда нет никаких геометрических проекций, при условии что данный процесс *взаимно-однозначен* и как он, так и обратный ему процесс непрерывны. *Взаимно-однозначен* — это значит, что в каждую точку B переходит одна и только одна точка A.

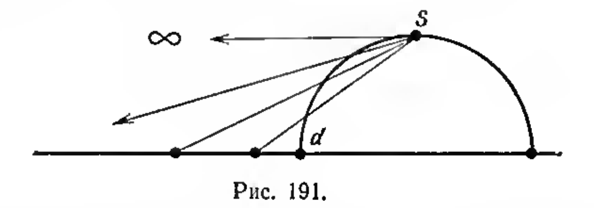


Рис. 191.

То же самое верно и для обратного преобразования: при f^{-1} в каждую точку A переходит одна и только одна точка B. Такая симметричная и непрерывная функция — это не что иное, как наш старый знакомый, гомеоморфизм, только уже определенный должным образом.

График представляет собой тоже некую разновидность преобразования. Для того чтобы понять, что такое график, не обязательно знать аналитическую геометрию: например, кривая температуры больного есть график, сопоставляющий различным моментам времени температуру в градусах. Составляя график, мы берем элементы (выбранные моменты) множества T (время) и сопоставляем им элементы множества F (градусы).

Конечно, сестра не измеряет температуру больного непрерывно, но, изображая изменение температуры на листе бумаги, мы можем нарисовать непрерывный график. И снова термин «график» можно определить лучше.

Здесь понятие близости, или окрестности, немного отличается от более или менее круглых форм, которыми мы пользовались в E^2 (двумерное пространство), хотя и здесь участвуют два измерения. Мы берем одномерное множество T и одномерное множество F, а затем сравниваем их между собой, так что график по существу

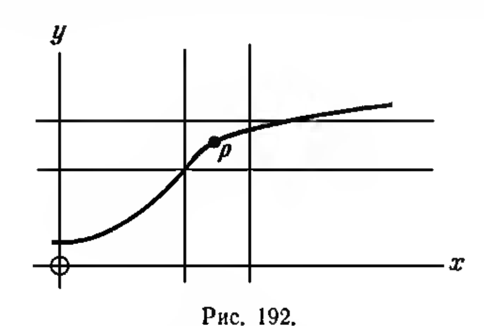


Рис. 192.

представляет собой *сравнение* двух одномерных множеств. Мы говорим, что график непрерывен, если он непрерывен в каждой точке. Проведем *произвольную* пару прямых: одну выше, а другую ниже p; если нам удастся провести пару вертикальных прямых, одну справа, а другую слева от p, такую, чтобы между ними не было точек, *не содержавшихся уже между горизонтальными прямыми* (рис. 192), то это и означает непрерывность графика в точке p. Все это станет яснее, если мы приведем пример разрывного графика (рис. 193). В нем есть брешь, но не по отношению к x (в *множестве* x бреши нет). Если мы возьмем достаточно близкие прямые, ограничивающие с двух сторон точку p, так чтобы точка p' оказалась вне их, то сколь бы близкими мы ни выбирали соответствующие вертикальные прямые, точка p' всегда окажется между ними, ибо она расположена точно над p. А это как раз и противоречит данному выше определению непрерывности. Можно было бы подумать, что такой пример не очень хорош, поскольку те же самые рассуждения пройдут и в случае

вертикальной прямой, в которой нет никаких брешей. Однако такая линия не удовлетворяет определению графика функции. (Конечно, это довольно трусливый способ избежать трудностей, спрятавшись за определение, однако он полезен, ибо ведет к ясности.)

Приведенное выше определение непрерывного графика похоже на данное ранее определение непрерывного преобразования, только здесь окрестностью точки p, если рассматривать ее как *элемент множества* y, будет участок Ny оси y, в то время как если мы будем считать точку p *элементом множества* x, то соответствующей окрестностью окажется участок Nx горизонтальной оси.

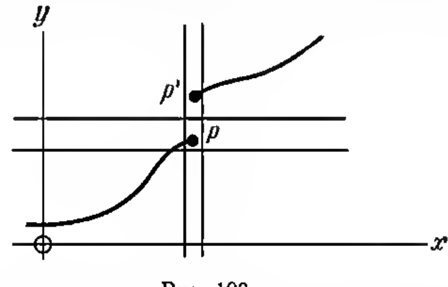


Рис. 193.

График, если он взаимно-однозначен и непрерывен в обе стороны, представляет собою не столько карту, сколько изображение на карте; другими словами, на нем приведены не только множество x и его «карта» (множество y), но и соответствие между x и y, представленное, так сказать, в графической форме. Поскольку каждое из участвующих множеств одномерно, график двумерен. Если бы мы захотели представить на графике изменение кинокадра со временем, то потребовалось бы 3 измерения. Еще более сложные преобразования привели бы к n-мерным графикам. Например, если мы отобразим внутренность шара во внутренность куба, то соответствующий график будет шестимерен.

Гомотопия

«Гомеоморфизм», которому теперь мы уже нашли лучшее определение, в слове «гомотопия» играет служебную роль. Последнее включает в себя не только воз-

можность гомеоморфного преобразования, но и обстоятельства, при которых оно оказывается возможным. Любую замкнутую кривую, говорим мы, можно деформировать в любую другую замкнутую кривую; но даже если мы дадим себе некоторые послабления (например, разрешая восстанавливаемые в дальнейшем разрезы —

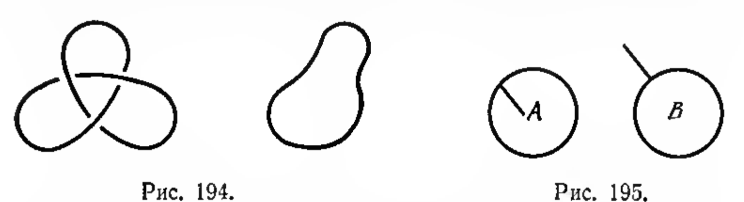


Рис. 194. Рис. 195.

рис. 194), следует понять, что возможны ситуации, когда нам нельзя будет так поступать. Как только мы укажем тип пространства, *в котором совершается данная деформация*, то тем самым мы наложим на нее новое ограничение. Если наша замкнутая кривая — это веревка, то в пространстве мы сможем с ней манипулировать так, как не удастся в случае, если она по условию лежит все время на плоскости.

Верно, конечно, что с помощью неких правил мы можем превратить на плоскости фигуру A в фигуру B

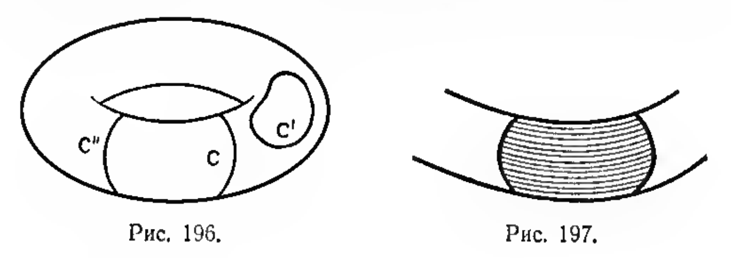


Рис. 196. Рис. 197.

(рис. 195), но это можно сделать только потому, что плоскость не упоминается как театр наших действий — здесь плоскость просто неявно и ошибочно предполагается, данные фигуры *плоские*, вот и все. В другой ситуации (рис. 196) можно вполне осмысленно сказать, что замкнутую кривую C на торе нельзя перевести *на торе* в положение C' и можно в положение C''. Вне тора, в пространстве E^3, не будет никаких затруднений

вовсе — независимо от того, сделана ли кривая из проволоки или только воображаема.

Еще одно понятие, о котором мы лишь вкратце упомянем,— это *компактность*. Оно характеризует, так сказать, «законченную бесконечность»: евклидова плоскость не компакт, тогда как сфера — компакт, хотя они и содержат «одинаковое количество» точек. Однако, если мы хотим описать компактность в терминах самого множества, не обращаясь к объемлющему пространству, то пользуемся следующим определением: «множество называется компактом, если у каждого его *бесконечного* подмножества есть предельная точка, принадлежащая самому множеству».

Все это не так туманно, как может показаться на первый взгляд. Читатель может сам попытаться разобраться в этом, используя знания, почерпнутые из последних двух глав.

Ответ на вопрос из раздела «Преобразования»: еще можно указать лишь точку, соответствующую точке j. Она определяется недвусмысленно тем условием, что в ней линии i и k соединяются с a. Но мы *не можем* указать точно, во что именно перешли i и k, а также их вершины h и l (мы можем только сказать, что k и h перешли в *разные* отростки, но не знаем, куда перешла каждая из этих линий).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Часто случается, что, налив себе чашку кофе, мы забываем о сливках. Трюк состоит здесь в том, чтобы не пытаться принести сливки к столу, а сходить с чашкой к холодильнику, где они хранятся. При первом способе нам придется четыре раза проделать путь от стола до холодильника: пойти за сливками, принести их к столу, унести сливки назад и возвратиться к чашке кофе. Во втором случае мы проделаем этот путь только дважды: принесем чашку к холодильнику и возвратимся с ней назад к столу. Все это нельзя достаточно хорошо выразить на языке геометрии, однако весь использованный здесь способ планирования последовательности наших действий хотя и арифметичен по своей природе, но принадлежит скорее к области топологии.

В связи с использованием ЭВМ это стало называться программированием, и теоретико-множественная топология составляет его основу. При разработке устрашающе запутанных алгоритмов для таких ЭВМ пользуются топологическим анализом графов, о которых мы упоминали в гл. 8. Топология используется также в астрономии и во многих других областях, где применяется математика. Эти области вряд ли относятся к повседневной жизни, однако мы, сами того не сознавая, пользуемся топологическими методами и в самых обыденных случаях. Большинство указаний на то, что́ где лежит, носят скорее топологический, чем геометрический характер: пальто — в вашем стенном шкафу; школа — в четвертом доме от пересечения этой улицы с шоссе № 32; «Аида» — в оперном театре.

Моряки, как и строители, пользуются геометрией; однако в обычных обстоятельствах ее использование сводится лишь к измерению расстояний и тому подобным простейшим вещам.

В эпоху Возрождения произошли некоторые изменения в научном мышлении и методе; одно из них лучше всего продемонстрировать на примере химии. Средневековая алхимия занималась главным образом качественными различиями; отличия в величине, по-видимому, занимали ее гораздо меньше — в результате она так и не сумела «оторваться от земли». При новом способе мышления химия обратилась от качественных различий к количественным (от Разновидности к Степени), и в хаосе фактов стал обнаруживаться некий порядок. С другой стороны, математика до появления топологии всегда занималась количественными методами, и в ней на первый взгляд развитие пошло в обратном направлении.

Но это на самом деле не так: перелистав еще раз страницы нашей книги, мы можем заметить, что, когда мы временно перестали интересоваться формой и мерой, они вновь прокрались в наши исследования в более изощренном и завуалированном виде, ибо качеству присуще количество; у разновидности есть степень, даже если мы и не измеряем эту степень жердями. Как сказал Стифен Винсент Бене (он говорил о Линкольне), жерди хороши для измерения, когда у вас есть забор из них.

Теорема Жордана, упоминавшаяся в начале книги, применительно к поверхности тора окажется справедливой в случае C', но, очевидно, не в случае C или C''. Мы основываемся здесь на том, что на торе C и C'' нельзя непрерывной деформацией стянуть в точку, тогда как C' — можно. Это свойство скорее пространства, в котором лежат данные фигуры, чем самих фигур. Мы можем теперь сказать, что на торе любые две кривые вроде C и C'' гомотопны, но ни одна из них не гомотопна C'.

Само преобразование C в C'', особенно если оно представляет собой гомеоморфизм (заштрихованная часть на рис. 197) — это *гомотопия* C и C''. Данное понятие еще шире: все промежуточные образы C взаимно

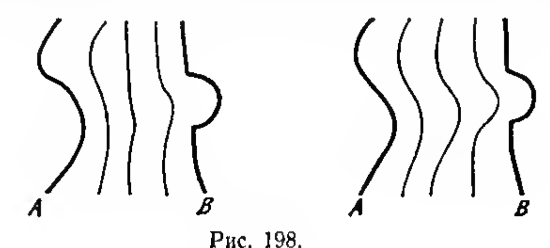


Рис. 198.

гомотопны. В двух немного более простых случаях, изображенных на рис. 198, мы можем заметить, что данная гомотопия не единственна: фактически существует бесконечно много гомотопий, приводящих к тому же результату — они переводят A в B.

Выбор конкретного преобразования менее важен, чем сама возможность или невозможность такого преобразования. Ни одного такого преобразования не существует для C и C', и бесконечно много их существует в случае C и C''. Все это, как может показаться, направлено против анархии, которая возникла бы, если бы совсем не было оговорено, что разрешается и чего не разрешается делать в топологии. Но, как мы уже говорили, самое главное — это знать, когда нужно быть точным, а когда терпимым. Хотя ограничение, накладываемое на гомотопию, несколько произвольно, оно позволяет нам проводить дальнейшую классификацию пространств (приводит к новому типу инвариантов).

Приложение I

Решение Гарднера состоит в том, что в полоске проводится нечетное число продольных складок — вдоль ее «длины» и под прямыми углами к краям, которые мы соединяем (рис. 199). Если число складок нечетно, то мы можем свести концы друг с другом с полуоборотом, независимо от того, сколь велико это нечетное число. Ведь перевернув «вверх ногами» букву N, мы снова получим N, тогда как, перевернув букву M, мы ее изменим. Таким образом, из неограниченно широкой полоски (при условии, что бумага достаточно тонкая) можно сложить достаточно узкую полоску, с которой и действовать затем, как обычно (рис. 200). После всех наших усилий (см. гл. 3) такое простое решение может привести буквально в ярость.

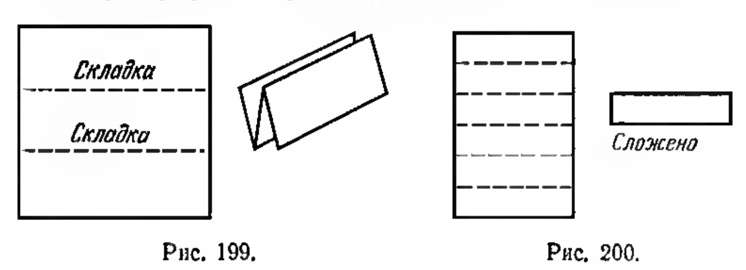


Рис. 199. Рис. 200.

Приложение II

Прежде чем склеивать полоску, разметьте ее, как показано на рис. 201 (полоска укорочена). Перенумерованные точки отсекают от боковых сторон соответственно $^1/_2$ и $^1/_4$ их длины, а пунктирные линии

проведены с обратной стороны. После того как мы склеим полоску, линии окажутся прямыми и непрерывными. Разрез начинается в точке *1* и далее идет в соответствии с номерами. После точки *5*, когда разрез дойдет до точки x, полоска раскроется и разрез придется продолжать вдоль соответствующей прямой. С этой

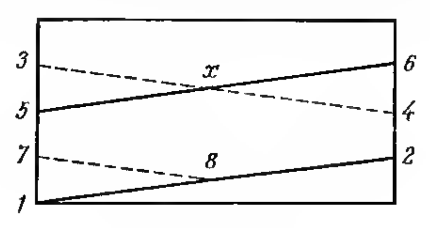


Рис. 201.

точки зрения разрез не будет непрерывным, но сама линия *будет* таковой.

Когда мы достигнем точки *8*, полоска распадется на две равновеликие части, что можно показать, подсчитав треугольники на рис. 202. Заштрихованная часть соответствует одному куску, а незаштрихованная — другому; в каждом из кусков содержится по 8 треугольников. На рис. 62 представлен другой метод, с помощью которого можно разрезать лист Мёбиуса на две равновеликие части, но там разрез начинается не на крае, а на расстоянии $^1/_4$ от края.

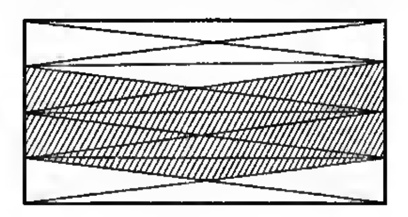
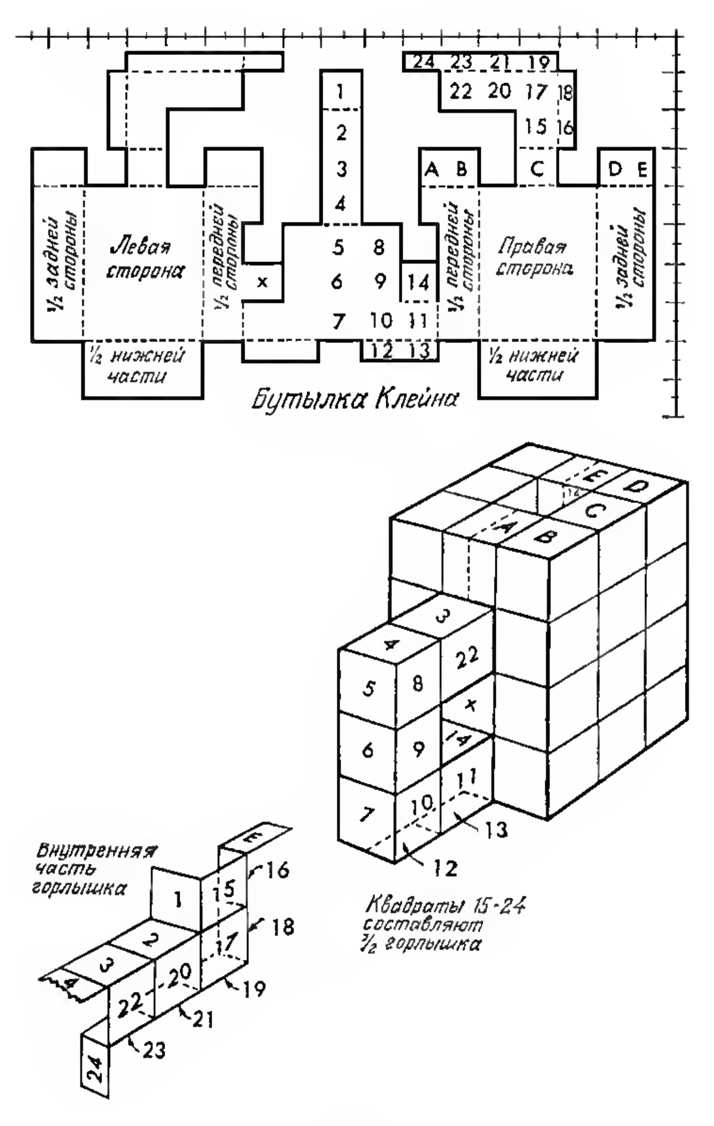


Рис. 202.

Приложение III

Чертеж показан на рис. 203, его лучше всего нанести на толстую бумагу «в клетку», где сторона клетки равна примерно 4 см. Вдоль жирных линий проводятся



24 23 21 19
22 20 17 18
15 16
1
2
3
4
A B
C
D E
½ задней стороны
Левая сторона
½ передней стороны
x
5 8
6 9
7 10 11
14
12 13
½ передней стороны
Правая сторона
½ задней стороны
½ нижней части
½ нижней части
Бутылка Клейна
Внутренняя часть горлышка
Квадраты 15-24 составляют ½ горлышка

Рис. 203.

разрезы, а по пунктирным линиям чертеж складывается. Чертеж почти полностью симметричен, за исключением частей, обозначенных через x и 14. На перспективном чертеже цифры и буквы сохранены, дабы облегчить складывание модели. Склейка производится без перекрытий, так что здесь нужно пользоваться не клеем, а клейкой лентой.

Приложение IV

Смешав $^1/_3$ красной краски со всей голубой, вы получите достаточно пурпурной краски, чтобы покрасить 16 м². На рис. 204 показана схема раскраски.

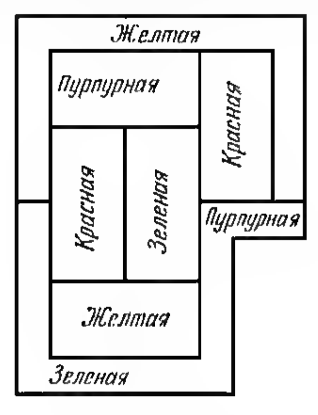


Рис. 204.

Приложение V

Такая последовательность *представляет собой* комбинацию двух последовательностей, но ее удается выразить одной формулой: количество частей равно $2^n + 1$ (3, 5, 9, 17 и т. д.), где n — число неполных разрезов.

Приложение VI

Построение (рис. 205). Проведем прямые *1—2*, *2—3* и *3—4*, делая углы *2* и *3* прямыми. Соединим *1* с *3*, а *2* с *4*; точка пересечения *C* — искомая.

Доказательство. Проведем дополнительно прямые 4—5 и 5—6; в результате получится соответственно 4 и 5 прямоугольных треугольников.

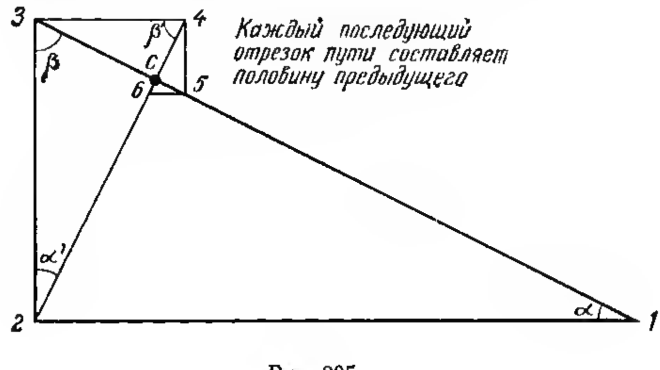


Рис. 205.

Отрезок 1—2 вдвое превышает отрезок 2—3, а отрезок 2—3 вдвое превышает отрезок 3—4;

∴ треугольники 1 — 2 — 3 и 2 — 3 — 4 подобны,

∴ $\angle \alpha = \angle \alpha'$ и $\angle \beta = \angle \beta'$.

∴ треугольник 2 — 3 — C подобен треугольнику 1 — 2 — 3;

∴ углы, примыкающие к C, прямые.

Все последовательные прямоугольные треугольники, указанные ниже, подобны: 1 — 2 — C, 2 — 3—C, 3—4 — C, 4—5 — C ... и т. д., а их гипотенузы (поскольку их длина каждый раз уменьшается вдвое) образуют требуемый маршрут человека. Что и требовалось доказать.

Приложение VII

На рис. 206 представлена диаграмма для случая пяти множеств: пунктирные линии показывают начало

шестого множества, идущего вдоль границы пятого множества. Таким путем можно построить диаграмму для

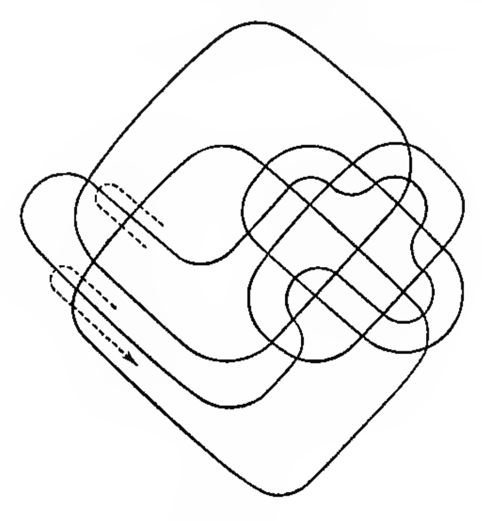


Рис. 206.

любого числа множеств, нужно только располагать каждое следующее множество вдоль границы предыдущего.

СОДЕРЖАНИЕ

Научно-популярное изданке

Стнвен Барр

РОССЫПИ ГОЛОВОЛОМОК

Ст. научный редактор А. Г. Белевцева
Мл. научный редактор М. А. Харузина
Художннк Л. М. Муратова
Художественный редактор Н. М. Иванов
Техннческнй редактор Л. П. Емельянова
Корректор М. Е. Савина

ИБ № 6577

Сдано в набор 21.08.86. Подписано к печати 21.10.86. Формат 84×108/32. Бумага книжно-журнальная. Печать высокая. Гарнитура литературная. Объем 6,50 бум. л. Усл. печ. л. 21,84. Усл. кр.-отт. 21,84. Уч.-изд. л. 17,82. Изд. № 9/5361. Тираж 250 000 экз. (1-й завод 1-100 000 экз.) Зак. № 284. Цена 1 р. 20 к.

Издательство «Мир»
129820, ГСП, Москва, И-110, 1-й Рижский пер., 2

Лекикградская типография № 2 головное предприятие ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052, г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29.